# Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen.

---

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

**Inaugural-Dissertation**

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

**Victor Vâlcovici**
aus Galatz (Rumänien).

---

Göttingen 1913.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Angenommen von der math.-naturwissenschaftlichen Abteilung.

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 1913.

Referent: Herr Professor Dr. L. Prandtl.

Correferent: Herr Professor Dr. C. Carathéodory.

# Einleitung.

Das sogenannte D'Alembertsche Paradoxon, d. h. der augenscheinliche Widerspruch zwischen der theoretischen Hydrodynamik, welche behauptet, daß auf einen sich in einer inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit gleichförmig bewegenden Körper kein Widerstand von Seiten der Flüssigkeit ausgeübt wird, und der praktischen Erfahrung, wo man den experimentellen Beweis dafür hat, daß der Körper sogar in einer mit sehr geringer inneren Reibung und Kompressibilität versehenen Flüssigkeit einen ungefähr mit dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand zu überwinden hat, erfuhr nebst einer anderen, mit der potentiellen Bewegung in Widerspruch stehenden Erscheinung, nämlich der Ausbildung des freien Strahles, durch die Stokes-Helmholtzsche Hypothese der Diskontinuitätsflächen [1]) wenigstens qualitativ eine sehr befriedigende Erklärung. Dieselbe verzichtet auf die Stetigkeit der Geschwindigkeit in den Punkten, wo sonst die gewöhnliche Theorie eine sehr große Geschwindigkeit verlangen würde; dies geschieht nämlich immer in der Nähe der scharfen Kanten des Körpers. Die sehr große Geschwindigkeit würde der Bernoullischen Gleichung gemäß, einen sehr großen negativen Druck an der Stelle fordern, was wohl physikalisch für die gewöhnlichen Flüssigkeiten nicht annehmbar ist.

Das erste zweidimensionale Beispiel in der Annahme der Diskontinuitätsflächenbildung wurde von Helmholtz selbst behandelt. Die dazu von ihm benutzte mathematische Methode war nur diesem Beispiel eigen. Kirchhoff [2]) fand später, indem er die Funktionentheorie eines komplexen Argumentes heranzog, eine sehr elegante

1) Stokes, Pap., Bd I, S. 310/311; Helmholtz, Über disk. Bew., Wissensch. Abhandlg., S. 146.

2) Mechanik, 22. Vorlesung.

Angenommen von der math.-naturwissenschaftlichen Abteilung.

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 1913.

Referent: Herr Professor Dr. L. Prandtl.

Correferent: Herr Professor Dr. C. Carathéodory.

# Einleitung.

Das sogenannte D'Alembertsche Paradoxon, d. h. der augenscheinliche Widerspruch zwischen der theoretischen Hydrodynamik, welche behauptet, daß auf einen sich in einer inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit gleichförmig bewegenden Körper kein Widerstand von Seiten der Flüssigkeit ausgeübt wird, und der praktischen Erfahrung, wo man den experimentellen Beweis dafür hat, daß der Körper sogar in einer mit sehr geringer inneren Reibung und Kompressibilität versehenen Flüssigkeit einen ungefähr mit dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand zu überwinden hat, erfuhr nebst einer anderen, mit der potentiellen Bewegung in Widerspruch stehenden Erscheinung, nämlich der Ausbildung des freien Strahles, durch die Stokes-Helmholtzsche Hypothese der Diskontinuitätsflächen [1]) wenigstens qualitativ eine sehr befriedigende Erklärung. Dieselbe verzichtet auf die Stetigkeit der Geschwindigkeit in den Punkten, wo sonst die gewöhnliche Theorie eine sehr große Geschwindigkeit verlangen würde; dies geschieht nämlich immer in der Nähe der scharfen Kanten des Körpers. Die sehr große Geschwindigkeit würde der Bernoullischen Gleichung gemäß, einen sehr großen negativen Druck an der Stelle fordern, was wohl physikalisch für die gewöhnlichen Flüssigkeiten nicht annehmbar ist.

Das erste zweidimensionale Beispiel in der Annahme der Diskontinuitätsflächenbildung wurde von Helmholtz selbst behandelt. Die dazu von ihm benutzte mathematische Methode war nur diesem Beispiel eigen. Kirchhoff [2]) fand später, indem er die Funktionentheorie eines komplexen Argumentes heranzog, eine sehr elegante

1) Stokes, Pap., Bd I, S. 310/311; Helmholtz, Über disk. Bew., Wissensch. Abhandlg., S. 146.

2) Mechanik, 22. Vorlesung.

Methode, welche viele ähnliche Beispiele zu umfassen vermochte und die man bis vor 6 Jahren bis auf kleine Veränderungen stets bei der Behandlung solcher Aufgaben anzuwenden pflegte. Das wesentliche bei der Kirchhoffschen Behandlungsweise besteht darin, die konforme Abbildung des Hodographen oder eines mit ihm isogonal verwandten Gebietes auf die Geschwindigkeitspotential-Ebene zu finden, was stets gelingt, wenn die starren Wände eben sind.

Den dritten großen Fortschritt erfuhr die Theorie der Diskontinuitätsflächen durch die Methode, die Prof. Levi-Civita[1]) zum ersten Male angewendet hat. Bei dieser letzten Methode kommt es im Falle der ebenen Wände auf die Ermittelung einer gewissen Funktion eines komplexen Argumentes an, von der man Folgendes weiß:

a) sie ist regulär im Inneren und bis auf eine endliche Anzahl von Punkten auch auf dem Rande eines gegebenen einfach oder mehrfach zusammenhängenden Grundgebietes $G$;

b) in den singulären Randpunkten weist ihr Realteil gewisse Unstetigkeiten auf, deren Natur gegeben ist;

c) in den übrigen Punkten des Randes nimmt ihr Realteil eine stetige Reihe von vorgegebenen Werten an.

Diese Funktion läßt sich bekanntlich bis auf eine additive, rein imaginäre Konstante, die man übrigens durch die physikalischen Bedingungen des Problems ermitteln kann, eindeutig bestimmen.

Die Vorteile der Levi-Civitaschen Methode bestehen einerseits darin, daß sie die Kirchhoffsche konforme Abbildung, welche forderte, daß die Geschwindigkeit eine umkehrbar eindeutige Funktion des Potentials ist, ausschaltet, und anderseits, daß sie die Lösung für krumme Wände auf eine bestimmte Randwertaufgabe von dem Riemann-Hilbertschen Typus zurückführt.

Anschließend an diesen Teil der Levi-Civitaschen Arbeit habe ich, indem ich einen von Herrn Prof. v. Kármán herrührenden Gedanken verfolgte, die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für den Fall eines sich gleichförmig bewegenden Körpers in einer in allen Richtungen ins Unendliche ausgedehnten Flüssigkeit bewiesen, sowie die erste Annäherung bei der kreiszylindrischen Schale berechnet. Ferner erlaubt die Übersichtlichkeit der Levi-Civitaschen Methode die gesuchte Funktion derart zu wählen, daß man ungefähr die der vorgegebenen Kontur entsprechende Lösung bekommt. Auf diese Weise hat Herr Villat in seiner Pariser Thèse durch

---

1) Scie e leggi di resistenza, Rendiconti Palermo, 1907, 1. sem.

eine geschickte Umformung der Schlußformel manche Aufgaben vollständig lösen können, wo die starren Wände nicht mehr geradlinig waren[1]).

Bis jetzt hat man solche Aufgaben behandelt, wo das Grundgebiet $G$ einfach zusammenhängend etwa das innere Gebiet des Einheitskreises[2]), oder zweifach zusammenhängend wie das Innere eines Kreisringes ist[3]). Letzterer Fall kann nur mit Hilfe der elliptischen Funktion behandelt werden und bietet gewöhnlich große rechnerische Schwierigkeiten; bis jetzt hat man in der Tat noch nicht einmal die zur Bestimmung der in jeder Aufgabe vorkommenden Parameter notwendigen Gleichungen deutlich aufgestellt. Die tatsächliche Lösung derselben in Bezug auf die Parameter bildet meistens eine schwierige Aufgabe der angewandten Mathematik.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit soll in ihrem ersten Teil die Behandlung des folgenden Falles sein: Ausströmung eines Strahles aus einem Gefäß gegen einen Körper. Der Fall führt, wie man sehr leicht einsieht, wenn man die Levi-Civitasche Methode gegenwärtig hat, und wie übrigens Herr Villat es bemerkt hat[4]) auf einen Kreisring als Grundgebiet $G$. Die verschiedenen da auftretenden Parameter sind durch gewisse Gleichungen miteinander verbunden, deren genaue Aufstellung und Lösungsmöglichkeit erörtert wird.

In dem zweiten Teil dieser Arbeit wird der Fall der symmetrischen Bewegung behandelt, welcher bedeutende rechnerische Vereinfachungen erfährt. Trotzdem kann man die Auflösung der aufgestellten Gleichungen nicht bis zu Ende führen. Wir setzen für die verschiedenen aus diesen Gleichungen zu bestimmenden Parameter gewisse Reihenentwicklungen an, deren unbestimmte Koeffizienten sich durch die physikalischen Bedingungen des Problems ermitteln lassen. Diese Werte benutzen wir, um über einen sehr wichtigen praktischen Fall die Entscheidung der Theorie zu bekommen: es handelt sich um den Vergleich der Eiffelschen Versuchsanstalt (Strahl aus einem Gefäß gegen einen Körper) mit den von Prof. Prandtl in Göttingen angestellten Widerstandsversuchen

---

1) Annales de l'École normale sup., 1911, Sur la Résist. des fluides.

2) U. Cisotti, Vene fluenti Rendiconti Palermo, 1908, 1; Levi-Civita a. a. O.

3) U. Cisotti, Sul moto di un solido in un canale. Rend. Pal., 1902. 2. sem.; H. Villat, Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle, Annales de l'Ecole normale sup., 1912.

4) Sur la détermination de certains mouvements disc. des fluides, Par. C. R. 1911, I.

(Körper in einem Kanal). Diese Versuche, die durch die Forderungen der praktischen Zwecke ins Leben gerufen worden sind, geben für den auf dem Körper ausgeübten Druck Werte an, welche für den Fall des Körpers in einer in allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit gelten sollen. Der Zweck des zweiten Teiles dieser Arbeit soll gerade die Bestimmung der theoretischen Abweichungen jeder von diesen beiden Versuchsarten von der wirklich beabsichtigten sein, in der Annahme, daß die Stokes-Helmholtzsche Hypothese aufrecht erhalten bleibt, und daß die Strömung zweidimensional ist. Es wird da zunächst die symmetrische Strömung des Strahles, welcher aus einer ebenen Düse austritt und eine ebene Platte trifft, berechnet. Als speziellen in dem Vorigen enthaltenen Fall hat man erstens die Strömung um den Körper in einem Kanal und zweitens die Strömung um den Körper in der in allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, sodaß man sämtliche Rechnungen nur einmal zu machen braucht.

## Erster Teil.

# Ausströmung eines Strahles aus einer Düse gegen eine Platte.

### § 1. Die Aufstellung des Problems.

Aus einem Gefäß $D$ (Fig. 1), welches sich bis ins Unendliche längs zweier Asymptoten erstreckt, kommt durch die Öffnung $B_1 B_2$ mit den scharfen Kanten $B_1$ und $B_2$ ein gewöhnlicher Strahl, welcher hinterher den Körper $A A_1 A_2$ trifft und sich spaltet, sodaß sich hinter dem Körper ein Totwasser bildet. Wir wollen an-

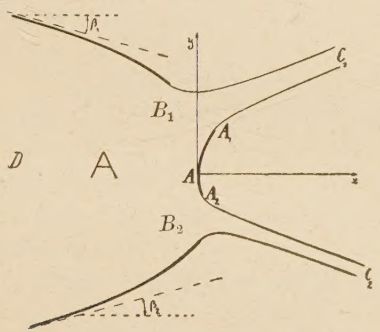


Fig. 1.

nehmen, daß sowohl die Wände des Gefäßes als auch die des Körpers durch reguläre analytische stets mit einer stetig veränderlichen Tangente versehene Kurven dargestellt sind[1]).

---

1) Die meisten Autoren, welche Aufgaben dieser Art behandelt haben, lassen einen Eckpunkt $A$ auf der Kurve $A_1 A A_2$ zu, und legen gerade in diesen Punkt den einzigen Staupunkt der ganzen Bewegung. Diese letzte Annahme ist offenbar vollkommen willkürlich und die Folge davon ist, daß das Problem überbestimmt wird. In der Tat ergibt sich unter dieser Annahme eine Relation zwischen den beiden Bogenlängen $A A_1$ und $A A_2$ (vgl. Levi-Civita, a. a. O., p. 25—26). Die Frage, ob überhaupt Eckpunkte mit dieser Art von Bewegung verträglich sind, verlangt eine prinzipielle Untersuchung des Problems (vgl. H. Villat, sur le changement d'orientation d'un obstacle donné dans un courant fluide, C. R. 1912, I).

Dieselbe Annahme wollen wir über die freien Grenzen $B_1 C_1 A_1$ und $B_2 C_2 A_2$ machen; dagegen dürfen etwaige Singularitäten in den Punkten $A_1, A_2, B_1, B_2$ auftreten, was die Tangente anbelangt.

Die freie Grenze $B_1 C_1$ soll eine Asymptote mit derselben Richtung wie die der freien Grenze $A_1 C_1$ besitzen. Das Analoge soll für die freien Grenzen $B_2 C_2 A_2$ gelten. Das ganze von der sich in Bewegung befindlichen Flüssigkeit erfüllte Gebiet A soll einfach zusammenhängend sein und der Druck, welcher, wie wir annehmen wollen, durch eine stetige Funktion des Ortes in der ganzen Ebene dargestellt werden kann, soll überall in dem toten Wasser derselbe sein. Aus der Bernoullischen Gleichung ergibt sich dann unmittelbar, daß der absolute Betrag der Geschwindigkeit einen und denselben Wert längs jeder freien Grenze annimmt. Denselben wollen wir gleich 1 setzen, indem wir über die Maßeinheiten passend verfügen.

Wenn $u$ und $v$ die Komponenten der Geschwindigkeit zwei senkrechten $Ax$, $Ay$ bedeuten, dann kann man bekanntlich kraft der Kontinuitäts- und der Wirbellosigkeitsgleichung die Existenz zweier Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ voraussetzen, sodaß die Identitäten

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

gelten. Man sieht aus diesen Gleichungen, daß $\varphi + i\psi$ eine Funktion $f$ des komplexen Argumentes $z = x + iy$ bedeutet, und daß

$$\frac{df}{dz} = u - iv = w(z)$$

ist. Damit haben wir ein sehr mächtiges Mittel zur Behandlung unseres Problems gewonnen, nämlich die Methode der Funktionentheorie eines komplexen Argumentes. Die Funktion $w$ ist überall in dem betrachteten Gebiet einschließlich der Grenzen endlich und von Null verschieden mit Ausnahme des Punktes $D$ im Unendlichen, wo sie event. verschwindet (wenn die beiden Zweige des Gefäßes divergieren, wie z. B. Fig. 1 zeigt), und des Staupunktes auf der Kurve $A_1 A A_2$, den wir $A$ nennen und als Nullpunkt unseres Koordinatensystems festlegen wollen, wo sie ebenfalls Null wird. Es sei außerdem $Ox$ im Sinne des positiven $u$ gerichtet zwischen den beiden Asymptoten des Gefäßes.

## § 2. Die Funktion $t(z)$.

Anstatt $w$ direkt zu studieren, führen wir eine neue Funktion $t$ durch die Beziehung

$$w = e^{-it} \tag{1}$$

ein. Wenn wir die einzigen singulären Punkt $A$ und event. $D$ (im Unendlichen) im ganzen Gebiet A durch je einen kleinen Halbkreis ausschließen und ferner einen bestimmten, von den unendlichen vielen Zweigen der Funktion $t$ herausgreifen, dann ist $t$ durch diese Gleichung eindeutig bestimmt; da sonst $w$ weder Null noch unendlich wird, so ist $t$ im ganzen Gebiet A und auf dessen Grenzen, die Punkte $B$ und $D$ ausgenommen, regulär. Es sei $\vartheta$ und $\varrho$ der reelle bezw. imaginäre Teil von $t$. Dann hat man $w = e^{\varrho}.e^{-i\vartheta}$, woraus man sieht, daß $e^{\varrho}$ den absoluten Betrag der Geschwindigkeit und $\vartheta$ ihren Winkel mit der $x$-Achse bis auf ein vielfach von $2\pi$ bedeutet; wir wollen jetzt denjenigen Zweig der Funktion $t$ herausgreifen, für welchen $\vartheta$ gegen $\alpha$ konvergiert, wenn man von $A_1$ in $A$ ankommt; dabei soll $\alpha$ den im Intervalle $(o, \pi)$ enthaltenen Winkel bedeuten, um den man die positive Halbachse $Ox$ im positiven Sinne drehen muß, damit sie mit der Tangente der Kurve $A_2A_1$ in $A$ zusammenfällt. $\vartheta$ wird die Werte $-\beta_1$ und $+\beta_2$ auf den Wänden $B_1D$ bezw. $B_2D$ annehmen, wenn diese Winkel von den Asymptoten des Gefäßes mit der $Ox$-Achse gebildet werden. Dieses $\vartheta$ betrachten wir als den Winkel, den die Geschwindigkeit mit der $Ox$-Achse einschließt. Was $\varrho$ anbelangt, so bleibt es im ganzen Gebiet A endlich mit Ausnahme der singulären Punkte $A$ und event. $D$, wo er unendlich wird; in $D$ kann es nämlich endlich bleiben, falls die beiden asymptotischen Richtungen des Gefäßes zusammenfallen. Die Bernoullische Gleichung der stationären Bewegungen fordert ferner, die Unveränderlichkeit von $\varrho$ längs der freien Grenze, wo der Druck konstant bleibt. Dieser konstante Wert ist gleich Null, weil die Geschwindigkeit auf der freien Grenze gleich 1 im absoluten Betrag genommen worden ist.

Nun handelt es sich darum, eine im Gebiet A und auf dessen Grenzen, $A$ und $D$ ausgeschlossen, analytische Funktion $t$ zu finden, deren reeller Teil $\vartheta$ gewisse vorgeschriebene Werte auf den starren Wänden (des Gefäßes und des Körpers) annimmt und deren imaginärer Teil $\varrho$ auf den freien Grenzen (d. h. auf den übrigen Grenzen des Gebietes A) verschwindet. Man hat also eine gemischte Randwertaufgabe zu lösen, welche allerdings noch die

Schwierigkeit aufweist, daß ein Teil der Berandung, nämlich die freie Grenze, selbst nicht gegeben ist. Wir wollen diese Schwierigkeit aufheben, indem wir das Gebiet A durch ein anderes Gebiet B ersetzen, deren Grenzen vollkommen bekannt sind. Zu diesem Zwecke wollen wir erst bemerken, daß die Grenzen des Gebietes A aus Stromlinien bestehen, d. h. aus Linien längs deren $\psi$ einen konstanten Wert beibehält, und zwar so, daß dieser konstante Wert auf den Linien $D B_1 C_1$, $C_1 A_1 A A_2 C_2$, $C_2 B_2 D$, verschieden ausfällt. In der Tat stellt die Differenz der konstanten Werte, die auf den beiden ersten Stromlinien z. B. annimmt, die sekundlich zwischen den beiden Stromlinien durchflossene Flüssigkeitsmenge dar, welche offenbar von Null verschieden ist. $\varphi$ wächst anderseits unbegrenzt auf den freien Grenzen, denn $\frac{d\varphi}{ds}$ bedeutet den absoluten Betrag der Geschwindigkeit auf diesen Linien, wenn $ds$ das Bogenelement ist, und dieser absolute Betrag ist gleich 1. Daraus hat man gleich:

$$\varphi = \text{konst.} + s.$$

In ähnlicher Weise zeigt man, daß $\varphi$ negativ unendlich zu werden strebt, für die Punkte, die sich sehr weit auf den Zweigen des Gefäßes befinden. Ich betrachte nämlich die Wand $D B_1$ z. B. und zwar in genügender Entfernung, sodaß die Wand durch ihre Asymptote ersetzt werden darf; die Vernachlässigung ist unendlich klein von der zweiten Ordnung. Man hat $\frac{d\varphi}{ds} = -e^{-\varphi} = -V$, wenn $ds$ das Bogenelement von $B_1$ nach $D$ gerechnet bedeutet. Indem man wieder unendlich kleine Größen von der zweiten Ordnung vernachlässigt, kann man für den Abstand $dn$ zwischen $D B_1$ und der ihr unendlich nahe liegenden Stromlinie für von $B_1$ genügend entfernte Stellen schreiben:

$$dn = (dn)_0 + ms;$$

dabei ist $(dn)_0$ ein Anfangswert von $dn$ und $m$ eine positive Konstante. Anderseits gilt aber die Gleichung $V dn = Q = \text{konst.}$; $Q$ bedeutet nämlich die sekundliche Durchflußmenge zwischen den beiden unennlich naheliegenden Stromlinien. Daraus ergibt sich gleich:

$$-\frac{d\varphi}{ds}[(dn)_0 + ms] = Q \quad \text{oder} \quad \varphi = \text{konst.} - \frac{Q}{m}\log[(dn)_0 + ms]$$

d. h. $\varphi$ wird logarithmisch unendlich.

$f$ läßt sich bekanntlich bis auf eine additive komplexe Kon-

stante bestimmen. Wir wählen dieselbe dergestalt, daß $f$ in $A$ verschwindet. Im übrigen ist $f$ im ganzen Gebiet A regulär und besitzt die analytische Funktion $w$ als Ableitung, welche nirgends in A weder Null noch unendlich wird. Daraus folgt, daß das Gebiet A auf B in der $f$-Ebene (Fig. 2) konform abgebildet wird. Mit andern Worten ist $t$ eine reguläre Funktion von $f$ im ganzen

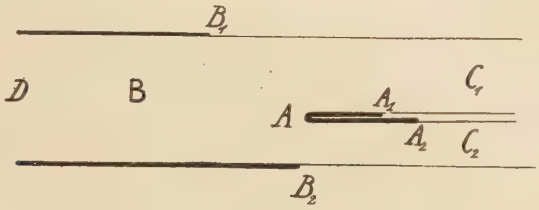


Fig. 2.

Gebiet B und auf dessen Grenzen, die Punkte $A$ und $D$ ausgenommen. Jetzt kennt man die Grenzen des Existenzgebietes der Funktion $t$; ihr Verhalten aber auf den Grenzen kennt man nicht mehr, denn $\varrho$ wird wohl gleich Null auf den freien Grenzen, $\theta$ aber variiert nicht mehr in bekannter Weise auf den starren Wänden in der $f$-Ebene, denn die Beziehung zwischen $f$ und $z$ ist noch nicht bekannt.

In einem bestimmten Falle ist aber die Variation von $\theta$ auf den starren Wänden in der $f$-Ebene vollständig gegeben: wenn die starren Wände in der $z$-Ebene geradlinig sind. Dann nimmt $\theta$ den Wert $-\beta_1$ längs der Grenze $DB_1$, $+\alpha$ längs $AA_1$, $\alpha-\pi$ längs $AA_2$, $\beta_2$ längs $DB_2$ an, wobei die Bedeutung der Winkel $\beta_1, \beta_2$ leicht zu präzisieren ist (Fig. 3). Trotzdem wollen wir vorläufig

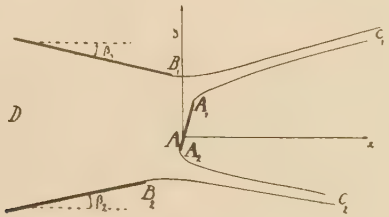


Fig. 3.

allgemein annehmen, daß $\theta$ eine uns unbekannte Variation auf den starren Wänden besitzt; hinterher werden wir die diese Variation angebende Funktion zu bestimmen versuchen.

## § 3. Vereinfachung des Gebietes B.

Nun hat man mit einer gemischten Randwertaufgabe zu tun: Es soll im Gebiete B die analytische überall reguläre Funktion $t(f) = \vartheta + i\varrho$ ermittelt werden, sodaß ihr Realteil $\vartheta$ auf einem Teil ihrer Berandung und ihr Immaninärteil $\varrho$ auf der übrigen Begrenzung vorgegebene Werte annimmt. Dieses Problem fordert eine gewisse Beziehung zwischen den vorgegebenen Werten des Real- und Immaginärteiles, welche eine numerische Gleichung zur Bestimmung der in dem Problem auftretenden Parameter bedeuten wird. Um die gesuchte Lösung zu finden, wollen wir zunächst das Gebiet B auf ein anderes abbilden und durch eine analytische Spiegelung die ganze Aufgabe auf eine gewöhnliche Randwertaufgabe reduzieren. Zu dem Zwecke bilden wir das Gebiet B auf die positive Halbebene $F$ konform ab. Das geschieht mit Hilfe der bekannten Christoffelschen Abbildungsformel, welche in unserem Falle lautet:

$$f = A \int \frac{F dF}{(c_2 + F)(c_1 - F)};$$

dabei bedeuten $A, c_1, c_2$ drei noch zu bestimmende Konstanten, $c_1$ und $c_2$ müssen jedoch positiv sein. Wir haben außerdem dem Punkte $f = 0$ den Punkt $F = 0$ entsprechen lassen. Die obige Formel kann man auch folgendermaßen schreiben:

$$(2) \qquad f = -\frac{A}{c_1 + c_2}\left\{c_1 \log(c_1 - F) + c_2 \log(c_2 + F)\right\}.$$

Für $F = 0$ hat man die Beziehung:

$$(\alpha) \qquad 0 = c_1 \log c_1 + c_2 \log c_2.$$

Die mehrdeutigen Funktionen $\log(c_1 - F)$ und $\log(c_2 + F)$ müssen wir derart bestimmen, daß sie beide reell für $F = 0$ ausfallen: die zwei singulären Punkte in der $F$-Ebene: $F = c_1$ und $F = -c_2$ wollen wir durch je einen kleinen Halbkreis vermeiden. Zwischen diesen zwei Punkten auf der reellen Axe der $F$-Ebene bleibt die Funktion $f$ kraft der Formel (2) reell, wenn $A$ ebenfalls reell ist, was man natürlich annehmen muß. Wenn man den Punkt $F = c_1$ überschreitet, dann wird $f$ auf der reellen Axe der $F$-Ebene komplex und zwar ist sein Immaginärteil gleich $i\pi \frac{c_1 A}{c_1 + c_2}$; ist etwa $\pi c$ der Wert der Stromfunktion auf dem Rande $D B_1 C_1$, dann müssen wir

$$i\pi \frac{c_1 A}{c_1 + c_2} = i\pi c$$

also

$$\frac{A c_1}{c_1 + c_2} = c \tag{3}$$

haben.

In analoger Weise findet man

$$\frac{A c_2}{c_1 + c_2} = c', \tag{4}$$

wenn $-\pi c'$ den Wert der Stromfunktion auf der Stromlinie $D B_2 C_2$ darstellt. Die Formel (2) kann man also auch folgendermaßen umformen:

$$f = -c \log (c_1 - F) - c' \log (c_2 + F). \tag{2'}$$

Es seien $a, a', b, b'$ die Werte der Potentialfunktion $\varphi$ bezw. in den Punkten (Fig. 1) $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$. Die Funktion $f$ bleibt, wie wir schon bemerkt haben, reell auf der ganzen Strecke $A_1 A_2$ (Fig. 4), und nimmt alle Werte von Null bis Unendlich zweimal an: einmal links und einmal rechts von 0. Es sei $F = -a_2$ der dem Werte $f = a'$ entsprechende Wert und $F = a_1$ der dem Werte $f = a$ entsprechende. Man hat offenbar $a_2 < c_2$, $a_1 < c_1$ und:

$$(\beta) \qquad \begin{cases} a = -c \log (c_1 - a_1) - c' \log (c_2 + a_1) \\ a' = -c \log (c_1 + a_2) - c' \log (c_2 - a_2). \end{cases}$$

Zwischen $D$ und $C_2$ (Fig. 4) wird die durch (2)' angegebene Funktion $f$ komplex, wie wir schon konstatiert haben, und ihr Realteil nimmt sämtliche Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ nur einmal an; es sei $-b_2$ der Wert, den die Funktion $F$ annehmen soll, damit $f = b'$ wird. Zwischen $C_1$ und $D$ wird der Realteil von $f$ ebenfalls sämtliche positiven und negativen Werte nur einmal annehmen; es sei $f = b$ für $F = b_1$. Man hat wiederum die Gleichungen:

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} b = -c \log (b_1 - c_1) - c' \log (b_1 + c_2) \\ b' = -c \log (b_2 + c_1) - c' \log (b_2 - c_2). \end{cases}$$

Aus (3) und (4) hat man übrigens durch Elimination von $A$:

$$(\delta) \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{c}{c'}.$$

Die sechs Gleichungen $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ und $(\delta)$ dienen uns zur Bestimmung der sechs Konstanten $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, wenn die Para-

meter $a, a', b, b', c, c'$ bekannt sind. $c_1$ und $c_2$ lassen sich sehr leicht aus $(\alpha)$ und $(\delta)$ bestimmen:

$$(\alpha') \qquad c_1 = \left(\frac{c}{c'}\right)^{\frac{c'}{c+c'}}, \quad c_2 = \left(\frac{c'}{c}\right)^{\frac{c}{c+c'}},$$

sodaß wir diese beiden Größen aus den Gleichungen $(\beta)$ und $(\gamma)$ gleich eliminieren können und somit nur vier Gleichungen für die vier Unbekannten $a_1, a_2, b_1, b_2$ erhalten. Umgekehrt kann man aus diesen Gleichungen die Werte von $a, a', b, b'$ unmittelbar bekommen, wenn $a_1, a_2, b_1, b_2$ und $c, c'$ bekannt sind. Wir wollen auch im Folgenden diese sechs Konstanten als Parameter ansehen und sie durch die physikalischen Bedingungen des Problems zu bestimmen versuchen. Eigentlich werden wir $c_1, c_2$ formell beibehalten und stets die durch $(\alpha')$ angegebenen Werte darunter verstehen.

## § 4. Die $s$-Ebene.

Unser ganzes Problem ist auf Folgendes reduziert worden: Der Realteil einer in der ganzen positiven Halbebene $\Im(F) > 0$ regulären analytischen Funktion ist auf den Strecken $DB_2$, $A_2A_1$ und $B_1D$ (Fig. 4) gegeben; ihr Imaginärteil ist auf den Strecken $B_2A_2$, $A_1B_1$ gleich Null; es wird diese Funktion $t(F)$ gesucht.

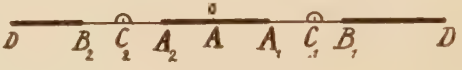


Fig. 4.

Wir haben nämlich die Halbebene $\Im(F) \geqq 0$ aus dem Gebiete B durch eine konforme Abbildung abgeleitet, sodaß $\Im(F) \gtreqless 0$ wieder ein Regularitätsgebiet für unsere gesuchte Funktion $t$ bedeutet, höchstens mit Ausschluß der Grenzpunkte: $F = \infty, -c_2, 0, c_1$.

Wir wollen diese gemischte Randwertaufgabe auf eine gewöhnliche reduzieren; das werden wir durch zwei konforme Abbildungen erreichen. Die eine ist die konforme Abbildung dieser positiven Halbebene $\Im(F) \geqq 0$ auf ein Rechteck in einer neuen Ebene $u = v + iw$, deren Ecken den Punkten $A_1, A_2, B_1, B_2$ entsprechen sollen (Fig. 5); die dazu entsprechende Abbildungsfunktion bekommt man wieder durch die Christoffelsche Formel:

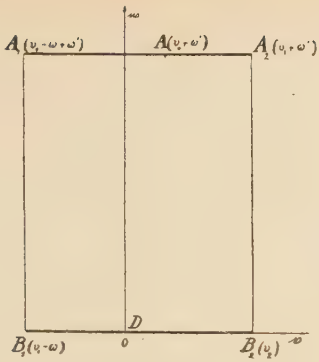


Fig. 5.

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dF} = \frac{1}{\sqrt{(F+b_2)(F+a_2)(F-a_1)(F-b_1)}}. \tag{5}$$

Die vier singulären Punkte $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ vermeiden wir durch Halbkreise in der $F$-Ebene und durch Viertelkreise in der u-Ebene. Sodann können wir den mehrdeutigen Funktionen $\sqrt{F+b_2}$, $\sqrt{F+a_2}$, $\sqrt{F-a_1}$, $\sqrt{F-b_1}$ einen eindeutigen Sinn beilegen; wir wollen denjenigen Zweig jeder von diesen vier Funktionen betrachten, welcher reell und positiv auf der reellen Achse rechts von dem entsprechenden kritischen Punkte in der $F$-Ebene ist. Wir legen den abgebildeten Punkt $D$ in den Nullpunkt der u-Ebene und die Seite $B_1 B_2$ des Rechtecks auf die $O\mathfrak{v}$-Achse; im übrigen soll das Innere des Rechtecks der positiven Halbebene $\Im(F) \geqq 0$ entsprechen. Somit wird die obige Abbildungsfunktion:

$$\mathfrak{u} = -\int_F^{\infty} \frac{dF}{\sqrt{(F+b_2)(F+a_2)(F-a_1)(F-b_1)}}$$

oder durch Umkehrung

$$F = F(\mathfrak{u}); \tag{5'}$$

$F(\mathfrak{u})$ ist eine elliptische Funktion mit den primitiven Halbperioden:

$$\begin{cases} \omega = -\int_{-b_2}^{b_1} \frac{dF}{\sqrt{P(F)}} = -\int_{-a_2}^{a_1} \frac{dF}{\sqrt{P(F)}} = \text{reell}, \\ \omega' = -\int_{a_1}^{b_1} \frac{dF}{\sqrt{P(F)}} = \int_{-b_2}^{-a_2} \frac{dF}{\sqrt{P(F)}} = \text{rein imaginär}, \end{cases} \tag{6}$$

wobei

$$P(F) = (F+b_2)(F+a_2)(F-a_1)(F-b_1)$$

ist. Man kann bekanntlich $F(u)$ durch die elliptische Funktion $\wp(u;\omega,\omega')$ von Weierstraß und ihre Ableitung ausdrücken; man hat nämlich:

$$(5'') \qquad F(u) = \tfrac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp'(2v_1)}{\wp u - \wp(2v_1)} - \frac{S_1}{4};$$

dabei bedeutet $v_1$ die Wurzel folgender zwei miteinander verträglichen Gleichungen:

$$(7) \quad \wp(2v_1) = \frac{S_1^2}{4} - \frac{S_2}{6}, \qquad -\wp'(2v_1) = -\frac{S_3}{4} + \frac{1}{16}S_1S_2 - \frac{S_1^3}{32}$$

und $S_1$, $S_2$, $S_3$ die ersten drei primitiven, symmetrischen und homogenen Funktionen ersten, zweiten und dritten Grades der vier Wurzeln der Gleichung $P(F) = 0$. $2v_1$ ist offenbar einer reellen Größe kongruent (mod. $2\omega'$); nur den reellen Wert von $v_1$ zwischen 0 und $\omega$ wollen wir als $v_1$ betrachten.

Ich will noch eine Bemerkung hinzufügen, welche uns die die vier Ecken des Rechteckes angebenden Werte der Veränderlichen u liefern wird. Man hat bekanntlich[1]) die Beziehung:

$$P(F) = \wp u - \wp(u+2v_1),$$

d. h. die Wurzeln der Gleichung $P(F) = 0$ entsprechen vier nicht kongruenten Zahlen von den unendlich vielen durch die folgende Gleichung in u:

$$(8) \qquad u + 2v_1 = \pm u + 2m\omega + n\omega'$$

angegebenen; dabei dürfen $m$ und $n$ alle beliebigen ganzen Zahlen durchlaufen. Die folgenden vier Zahlen

$$v_1, \quad v_1 - \omega, \quad v_1 + \omega', \quad v_1 - \omega + \omega'$$

stellen vier nicht kongruente Wurzeln (mod. $2\omega$, $2\omega'$) der Gleichung (8) dar; diese werden die Ecken unseres Rechteckes angeben und zwar in folgender Weise:

$$B_2(v_1), \quad B_1(v_1-\omega), \quad A_2(v_1+\omega'), \quad A_1(v_1-\omega+\omega').$$

Die zweite konforme Abbildung lautet:

$$(9) \qquad s = q\,e^{-i\frac{\pi}{\omega}(u-v_1)},$$

1) Siehe z. B. Appell et Lacour, Théorie des fonctions elliptiques.

wobei $q$ die Jacobische Konstante $e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ bedeutet, welche in unserem Falle positiv und kleiner als 1 ist. Nun wollen wir zeigen, daß es dem Rechteck $A_1 B_1 B_2 A_2$ in der u-Ebene einem Halbkreisring in der $s$-Ebene entspricht. Wenn nämlich $u = v_1 - \omega$ ist, dann wird $s = q e^{i\pi} = -q$, das heißt dem Punkte $B_1$ in der u-Ebene entspricht der Punkt $(s = -q)$ in der $s$-Ebene (Fig. 6); in derselben Weise sieht man ein, daß sich die Punkte $u = v_1$ und $s = q$ entsprechen. Nimmt u irgend einen zwischen $v_1 - \omega$ und $v_1$ vorhandenen Wert $v_1 - \omega\ \varepsilon (o < \varepsilon < \pi)$ an, dann wird $s = qe^{i\varepsilon}$, d. h. der Punkt $s$ bewegt sich auf der oberen Hälfte des Kreises $|s| = q$. Wird $u = v_1 + \omega'$, so hat man $s = q e^{-i\frac{\pi}{\omega}\cdot\omega'} = 1$, da $q = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ ist; wenn u sich auf der Strecke $B_2 A_2$ bewegt, dann bewegt sich $s$, wie man aus der Formel (10) sieht, auf der Strecke $(q, 1)$ in der $s$-Ebene. Für die übrige Berandung $A_2 A_1 B_1$ verfährt man in derselben Weise, wie man bei der Berandung $B_1 B_2 A_2$ verfahren ist. Die Drehungssinne auf den beiden Grenzen: in der

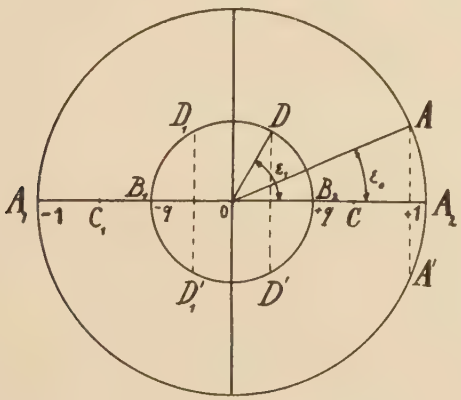


Fig. 6.

u- und in der $s$-Ebene, sind so, daß man schließen kann, daß das Innere des Rechtecks $A_1 A_2 B_2 B_1$ durch die Formel (9) auf das Innere des Halbkreisringes konform abgebildet wird, nämlich dem positiven Drehungssinn $(A_1 B_1 B_2 A_2 A_1)$ in der u-Ebene inbezug auf das Innere des Rechtecks entspricht der positive Drehungssinn

$(-1, -q, q, 1, -1)$ in der $s$-Ebene inbezug auf das Innere des Halbkreisringes. Allerdings müssen wir noch festlegen, welchen Zweig der mehrdeutigen Funktion $u(s)$ wir zur konformen Abbildung gewählt haben. Man sieht ohne weiteres ein, daß derjenige Zweig gewählt worden ist, welcher für $s = q$ gleich $v_1$ wird. Im übrigen entsprechen den Punkten $A$ und $D$ der $u$-Ebene die Punkte $s = \varepsilon^{i\varepsilon_0}$ bezw. $s = q e^{i\varepsilon_1}$ in der $s$-Ebene; dabei findet man mittelst der Formel (10)

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{\omega} v_1, \quad \varepsilon_0 = \frac{\pi}{\omega}(v_1 - v_0)$$

wenn $v_0 + \omega'$ den Punkt $A$ in der $u$-Ebene darstellt; $v_0$ ist offenbar eine reelle Größe.

## § 5. Die analytische Fortsetzung der Funktion $t(s)$.

Die gesuchte Funktion $t(s)$ ist regulär im ganzen Halbkreisringe $G$, Grenzen inbegriffen, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl Randpunkten. Auf den Grenzen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ wird ihr Immaginärteil überall Null, und bleibt sie regulär mit der evtl. Ausnahme der zwei Punkte $C_1$ und $C_2$. Infolge des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes können wir dann die Funktion $t(s)$ unterhalb der reellen Achse analytisch fortsetzen. Das fortgesetzte Gebiet besteht aus dem inbezug auf die reelle Achse gespiegelten Halbkreisringe, sodaß das jetzige Regularitätsgebiet der Funktion $t(s)$ ein voller Kreisring ist, mit Ausnahme evtl. der Punkte $C_1$ und $C_2$. Man kann aber leicht erkennen, daß die Funktion $t$ in $C_1$ und $C_2$ ebenfalls regulär bleibt, denn sie ist regulär in der Umgebung dieser Punkte, und die Werte, die sie in $C_1$ und $C_2$ bekommt sind endlich[1]). Mit diesem Kunstgriff haben wir unser Problem auf das Folgende zurückgeführt:

Man sucht eine analytische, im ganzen Kreisringe $(|s| > q, |s| < 1)$ reguläre Funktion $t(s)$, deren Realteil vorgegebene Werte auf den beiden Kreisen annimmt.

Prinzipiell hat man in folgender Weise zu verfahren: Man sucht zunächst den Realteil $\vartheta$ der Funktion $t(s)$ d. h. eine harmonische, durch ihre Randwerte zu bestimmende Funktion; $\vartheta$ ist bekanntlich eindeutig bestimmt, wenn man dieser Funktion gewisse Einschränkungen betreffs ihrer Unstetigkeiten auf dem Rande auf-

1) Osgood, Funktionentheorie, II, 7, § 6.

erlegt. Durch eine Quadratur bekäme man jetzt die zu $\vartheta$ assoziiert harmonische Funktion $\varrho$, wenn das Regularitätsgebiet von $t(s)$ einfach zusammenhängend wäre; dagegen ist die durch diese Quadratur definierte Funktion $\varrho$ eine mehrdeutige in dem betrachteten Kreisringe, sodaß man das Verschwinden ihres Peridizitätsmoduls erfordern muß [1]), was eine Beziehung zwischen den vorgegebenen Randwerten von $\vartheta$ bedeutet, um auf eine eindeutige Funktion $t(s)$ rechnen zu dürfen. Die bei der Bestimmung von $\varrho$ additiv vorkommende Integrationskonstante läßt sich durch die Symmetriebedingung der Funktion $t(s)$ inbezug auf die reelle Achse ermitteln.

## § 6. **Bestimmung der verschiedenen Strömungsparameter mittelst der Funktion $t(s)$.**

Wir wollen vorläufig die Funktion $t(s)$ als bekannt voraussetzen.

Aus (1) bekommt man $\frac{df}{dz} = e^{-it}$, da $w = \frac{df}{dz}$ ist. Somit hat man

$$z = \int_{f=0}^{f} e^{it}\, df. \tag{10}$$

Man kann aber $df$ durch $s$ ausdrücken, indem man die Beziehungen (2)′, (5″) und (9) heranzieht. Aus (2′) bekommt man nämlich, wenn man die Relation ($\delta$) berücksichtigt:

$$df = \frac{(c+c')\,F dF}{(c_1 - F)(c_2 + F)}$$

und aus (5″) und (9):

$$dF = F'(\mathfrak{u})\frac{i\omega}{\pi}\cdot\frac{ds}{s}$$

und also:

$$df = \frac{i\omega}{\pi}\cdot\frac{(c+c')\,F(\mathfrak{u})\,.\,F'(\mathfrak{u})}{[c_1 - F(\mathfrak{u})]\,[c_2 + F(\mathfrak{u})]}\cdot\frac{ds}{s},$$

wobei $F'(\mathfrak{u})$ die Ableitung von $F(\mathfrak{u})$ nach $\mathfrak{u}$ bedeutet, welche aus (5) zu entnehmen ist; dabei denkt man sich überall $\mathfrak{u}$ durch $s$ ausgedrückt. Sodann erhalten wir:

1) Schwarz, Abhandlungen, II.

$$(10') \qquad z = (c+c')\frac{i\omega}{\pi}\int_{e^{i\varepsilon_0}}^{s}\frac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{it(s)}}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot\frac{ds}{s},$$

woraus sich die Koordinaten $x$ und $y$ in der $z$-Ebene durch die in der $s$-Ebene $s_1$ und $s_2$ ausdrücken lassen, indem man die reellen bezw. imaginären Teile einander gleichsetzt. Will man z. B. die Koordinaten $x_1' + iy_1' = z_1$ des Punktes $B_1$ erhalten, dann muß man $s = -q$ als obere Grenze des Integrals (10)′ annehmen; für die Koordinaten $x_2' + iy_2' = z_2$ des Punktes $B_2$ muß man die obere Grenze $s = q$ nehmen. Somit bekommt man die Beziehungen

$$(I) \qquad z_1 = (c+c')\frac{i\omega}{\pi}\int_{e^{i\varepsilon_0}}^{-q}\frac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{it(s)}}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot\frac{ds}{s}$$

$$(II) \qquad z_2 = (c+c')\frac{i\omega}{\pi}\int_{e^{i\varepsilon_0'}}^{q}\frac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{it(s)}}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot\frac{ds}{s}$$

welche vier Gleichungen zur Bestimmung von vier von den sechs unbekannten Parameter $a_1, a_2, b_1, b_2, c, c'$ bedeuten, da $z_1$ und $z_2$ bekannt sind.

Die Stromlinien in der $s$-Ebene bekommt man unmittelbar, indem man den Koeffizienten von $i$ in dem Ausdruck von $f$ gleich einer Konstanten setzt; $f$ ist dabei als Funktion von $s$ durch die Beziehungen (2)′, (5)′ und (10) angegeben. Einer solchen Beziehung zwischen $s_1$ und $s_2$ entspricht durch die zwei Gleichungen (10)′ eine zwischen $x$ und $y$, welche die Stromlinie in der $x$-Ebene darstellt.

Ein Bogenelement in der $z$-Ebene wird durch die sich aus (10′) ergebenden Beziehungen

$$(11) \qquad \begin{cases} dx = -(c+c')\dfrac{\omega}{\pi}\cdot\Im\left\{\dfrac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{it(s)}}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot\dfrac{ds}{s}\right\}, \\ dy = \quad (c+c')\dfrac{\omega}{\pi}\cdot\Re\left\{\dfrac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{it(s)}}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot\dfrac{ds}{s}\right\} \end{cases}$$

gegeben: $|dz| = \sqrt{dx^2+dy^2}$; dabei bedeuten $\Re$ und $\Im$ vor dem Ausdruck

$$\frac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{it}}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot\frac{ds}{s}$$

daß sein Real- bezw. Immaginärteil zu nehmen ist.

Handelt es sich etwa um das Bogenelement auf der Strecke $A_2^1 A\, A_1$, dann ist u von der Form $\omega' +$ reeller Größe; in diesem Falle ist bekanntlich sowohl $p(u)$ als auch $p'u$ reell und $s = e^{i\varepsilon}$ (Fig. 6) soll den Centriwinkel der Variablen $s$ bedeuten. Die Ausdrücke von $dx$ und $dy$ lauten jetzt

$$(11') \qquad \begin{cases} dx = -(c+c')\,\dfrac{\omega}{\pi}\cdot\dfrac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{-\varrho}\cos\theta}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot d\varepsilon \\ dy = -(c+c')\,\dfrac{\omega}{\pi}\cdot\dfrac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{-\varrho}\sin\theta}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot d\varepsilon \end{cases}$$

und also:

$$|\,dz\,| = (c+c')\,\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{F(u)\sqrt{P(F)}\cdot e^{-\varrho}}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot d\varepsilon$$

Daraus erhält man unmittelbar die Länge $l_1 = A\,A_1$ (Fig. 1):

$$l_1 = (c+c')\,\frac{\omega}{\pi}\cdot\int_{\varepsilon_0}^{\pi}\frac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{-\varrho}}{(c_1-F)(c_2+F)}\,d\varepsilon$$

und die Länge $l_2 = A\,A_2$:

$$l_2 = -(c+c')\,\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{F(u)\sqrt{P(F)}\,.\,e^{-\varrho}}{(c_1-F)(c_2+F)}\,d\varepsilon;$$

die Summe beider Längen ist die bekannte $A_1 A_2 = l$, also:

$$(III) \qquad l = (c+c')\,\frac{\omega}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{|\,F(u)\,.\,\sqrt{P(F)}\,|}{(c_1-F)(c_2+F)}\,e^{-\varrho}\,d\varepsilon.$$

Diese Beziehung gibt eine fünfte Gleichung zur Bestimmung der Parameter $a_1, a_2, b_1, b_2, c, c'$ an; die sechste Gleichung bekommt man als Eindeutigkeitsbedingung bei der Ermittelung der Funktion $t(s)$, wie wir unten sehen werden.

Betrachten wir nun einen Punkt auf der freien Grenze $A_1 C_1$ (Fig. 1). Die Koordinaten desselben werden ebenfalls durch (10') gegeben. $\varrho$ ist in diesem Falle gleich Null, $F$ reell, $\sqrt{P(F)}$ rein immaginär (vgl. Fig. 4), $s$ und $ds$ reell. Die Formel (10') gibt:

$$z = z_1 + (c+c')\,\frac{i\omega}{\pi}\cdot\int_{-1}^{s}\frac{F\sqrt{P(F)}\,.\,e^{it}}{(c_1-F)(c_2+F)}\cdot\frac{ds}{s},$$

wenn $z_1 = x_1 + iy_1$ die Koordinaten des Punktes $A_1$ bedeuten. Den

Real- und Immaginärteil kann man ohne viel Mühe voneinander trennen. Wie man sieht, wird $z$ unendlich groß, wenn sich $s$ dem Werte $c_1$ nähert; diese Tatsache ist in Übereinstimmung mit unserer Voraussetzung über die Form der freien Grenze. Den asymptotischen Abstand zwischen den beiden freien Grenzen in $C_1$ findet man mittelst der Differenz der Stromfunktion auf $C_1 A_1$ und $C_1 B_1$; dieselbe ist $\pi c$ und gibt die sekundlich zwischen den beiden Stromlinien in $c_1$ durchflossene Flüssigkeitsmenge an. Die Strömungsgeschwindigkeit ist gleich 1, sodaß $\pi c$ die gesuchte Breite des Strahles in $C_1$ angibt. Analog bedeutet $\pi c'$ die asymptotische Breite des Strahles in $C_2$.

Die Winkel $\theta_1$ und $\theta_2$, die die freien Strahlen in $C_1$ bezw. $C_2$ mit der $x$-Achse einschließen, findet man, indem man $t = \vartheta + i\varrho$ für die den Punkten $C_1$ und $C_2$ entsprechenden Werte von $s$ berechnet; $\varrho$ ist in diesen zwei Punkten gleich Null, sodaß die Werte von $t$ selbst gleich den gesuchten Winkeln sind.

Erwähnenswert ist noch die Tatsache, daß die Ablösungsstellen $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ im allgemeinen singuläre Punkte für die freien Grenzen bedeuten; man kann nämlich beweisen, daß der Krümmungsradius gleich Null ist, wie wir später sehen werden. Die freien Grenzen zeigen regelmäßig den Typus der Kurven mit Spitze, die Spitzentangente fällt mit der Wandrichtung zusammen.

## § 7. Widerstand und Auftrieb.

Die von der Flüssigkeit her auf den Körper $A_1 A_2$ ausgeübte Wirkung besteht aus einer in $O$ angreifenden Kraft mit den Komponenten $W$ in der Richtung $Ox$ (Widerstand), $A$ in der Richtung $Oy$ (Auftrieb) und einem Drehmoment $M$ um den Nullpunkt. Dieselben sind nur dann endlich, wenn man ein endliches Stück auf der Platte abgrenzt und betrachtet, etwa das durch die Ebene $xOy$ und durch eine zweite zu $xOy$ im Abstand 1 parallel laufende Ebene. Die zu diesem aus der ganzen Platte abgegrenzten Stücke entsprechenden Größen $W$, $A$ und $M$ wollen wir im Folgenden berechnen.

Bedeutet $p$ den hydrodynamischen Druck, dann ist $p\,|dz|$ die auf die eine Seite des Linienelementes $|dz|$ der Platte $A_1 A_2$ wirkende Kraft; ihre $x$-Komponente ist offenbar $p\cos(nx)\,|dz|$, wenn $n$ die Richtung der Normale zu $A_1 A_2$ bedeutet. Auf der anderen Seite des betrachteten Elementes wirkt der konstante Druck $p$ des Stauwassers, sodaß die auf dieses Element wirkende Resultierende auf $Ox$ projiziert, gleich $(p - p_0)\cos(nx)\,|dz|$ ist. Auf das

ganze betrachtete Stück der Platte $A_1 A_2$ wirkt infolgedessen die $X$-Komponente

$$W = \int_{A_2}^{A_1} (p - p_0) \cos(nx) \, |dz|.$$

In derselben Weise findet man die $Y$-Komponente:

$$A = \int_{A_2}^{A_1} (p - p_0) \cos(ny) \, |dz|.$$

Wir wollen jetzt mit einem Kunstgriff zu einer einfachen Formel des Widerstandes und Auftriebes gelangen; dieses Verfahren rührt von Levi-Civita her[1]), welcher es zum ersten Male für eine Platte in einer nach allen Seiten unendlich ausgedehnten Flüssigkeit angewendet hat. Man sieht nämlich unmittelbar ein, daß die folgenden Gleichungen

$$\cos(nx) \, |dz| = dy, \quad \cos(ny) \, |dz| = -dx$$

gelten, und also

$$W + iA = \frac{1}{i} \int_{A_2}^{A_1} (p - p_0) \, dz,$$

indem jetzt $dz$ anstatt $dx + i\,dy$ geschrieben worden ist; der Integrationsweg von $A_2$ bis $A_1$ im Gebiete $A$ ist immer längs der Platte zu nehmen. Um $p$ durch bekannte Größen ersetzen zu können, müssen wir die Bernoullische Gleichung heranziehen:

$$p - p_0 = \frac{1}{2}(1 - V^2);$$

dabei bedeutet $V$ den absoluten Wert der Geschwindigkeit; im übrigen ist die Dichte gleich 1 gesetzt worden. $V$ ist also der absolute Betrag der komplexen Größe $w = u - iv$, welche ihrerseits gleich $e^{\varrho} . e^{-i\vartheta}$ ist, woraus man sieht, daß $V = e^{\varrho}$ ist und also:

$$W + iA = \frac{1}{2i} \int_{A_2}^{A_1} (1 - e^{2\varrho}) \, e^{it} \, df = \frac{1}{2i} \int_{A_2}^{A_1} e^{it} \, df - \frac{1}{2i} \int_{A_2}^{A_1} e^{it + 2\lambda} \, df,$$

da

$$dz = df . e^{it}$$

1) l. c. S. 4.

ist. Wir wollen uns denken, daß alle sich unter dem Integrationszeichen befindlichen Größen mittelst $s$ ausgedrückt sind, und daß der Integrationsweg der Halbkreis $A_2 A A_1$ in der $s$-Ebene (Fig. 6) ist. Die Funktion $t(s)$ ist symmetrisch inbezug auf die reelle Achse, sodaß in zwei inbezug auf diese Achse symmetrisch gelegenen Punkten die Funktion $\theta$ gleiche Werte und $\varrho$ gleiche aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Werte annimmt, d. h. die Funktion $it$ in einem Punkt $M$ unter der reellen Achse hat denselben Wert wie $it + 2\varrho$ in dem zu $M$ inbezug auf die reelle Achse symmetrischen Punkte. Können wir noch beweisen, daß $df$ auf der oberen Hälfte gleich ihrem Werte auf der unteren Hälfte des Kreises $|s| = 1$ ist, dann dürften wir offenbar schreiben

$$W + iA = \frac{1}{2i}\int e^{it}\, df, \tag{12}$$

welche die gesuchte Formel für den Widerstand und den Auftrieb darstellt; das Linienintegral ist dabei über den Kreis $|s| = 1$ im positiven Sinne zu führen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $df(s)$ und $df\left(\frac{1}{s}\right)$ zwei gleiche Größen sind ($s$ und $\frac{1}{s}$ sind ja zwei inbezug auf die reelle Achse symmetrische auf dem Kreise $|s| = 1$ gelegene Punkte). Dazu müssen wir $df$ berechnen, was wir schon einmal gemacht haben; man bekommt nämlich aus (2′), (5″), (9):

$$df = \frac{i\omega}{\pi} \cdot \frac{(c + c')\, F(u)\sqrt{P(F)}}{(c_1 - F(u))\,(c_2 + F(u))} \cdot \frac{ds}{s};$$

dabei muß man sich u überall durch seinen aus (9) entnommenen Werte $v_1 + \frac{i\omega}{\pi}\log s + \omega'$ ersetzt denken.

Ich will zunächst beweisen, daß $F(u)$ unverändert bleibt, wenn $s$ durch $\frac{1}{s}$ ersetzt wird, d. h. daß:

$$F\left(v_1 + \omega' + \frac{i\omega}{\pi}\log s\right) = F\left(v_1 + \omega' - \frac{i\omega}{\pi}\log s\right)$$

ist. Ich will hier nur kurz einen Beweis skizzieren, den Herr Villat für einen ähnlichen Fall gebracht hat[1]). Die durch (5″) angegebene Funktion $F(u)$ kann man bekanntlich folgendermaßen umformen:

1) a. a. O. auf S. 5 unter 3).

$$F(u) = \zeta(u - 2v_1) - \zeta u + \zeta(2v_1) - \frac{S_1}{4}$$

$$= \zeta\left(\omega' - v_1 + \frac{i\omega}{\pi}\log s\right) - \zeta\left(\omega' + v_1 + \frac{i\omega}{\pi}\log s\right) + \zeta(2v_1) - \frac{S_1}{4}$$

$$= -\zeta\left(-\omega + v_1 - \frac{i\omega}{\pi}\log s\right) - \zeta\left(-\omega' - v_1 - \frac{i\omega}{\pi}\log s\right) + \zeta(2v_1) + \frac{S_1}{4}.$$

Ersetzt man $s$ durch $\frac{1}{s}$, so hat man:

$$F\left(v_1 + \omega' - \frac{i\omega}{\pi}\log s\right)$$

$$= -\zeta\left(-\omega' + v_1 + \frac{i\omega}{\pi}\log s\right) + \zeta\left(-\omega' - v_1 - \frac{i\omega}{\pi}\log s\right) + \zeta(2v_1) - \frac{S_1}{4}.$$

Jetzt braucht man uur die bekannte Formel:

$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta'$$

anzuwenden, um die Gültigkeit der gewünschten Identität schließen zu dürfen. Man überzeugt sich leicht davon, daß $\sqrt{P(F)}$ sein Vorzeichen wechselt, wie $\frac{ds}{s}$, sodaß im ganzen $df$ unverändert bleibt.

Wie wir im Anfang dieses Paragraphen bemerkten, besteht die von der Flüssigkeit auf die Platte $A_1 A_2$ ausgeübte Wirkung außer der im 0 angreifende Kraft $(W, A)$ noch aus einem Drehmoment um diesen Punkt. Das elementare Drehmoment heißt:

$$(p - p_0)\{x\cos(ny) - y\cos(nx)\}|dz|$$

und daraus das gesamte Drehmoment:

$$M = \frac{1}{2}\int_{A_2}^{A_1}(1 - V^2)\{x\cos(ny) - y\cos(nx)\}|dz|$$

oder auch

$$M = \frac{1}{2}\int_{A_2}^{A_1}(1 - e^{2q})(x\,dx + y\,dy).$$

Ist $M$ negativ, dann hat die Kraft $(W, A)$ ihren Angriffspunkt zwischen $A$ und $A_1$; ist dagegen $M$ positiv, so fällt dieser Angriffspunkt zwischen $A$ und $A_2$.

## § 8. **Der Druck gegen die Wände des Gefässes.**

In ähnlicher Weise wie $W$ und $A$ oben berechnet worden sind, kann man die Komponenten $X_1$, $Y_1$ nach der Richtung $Ox$ bezw. $Oy$ auf ein Stück $B_1 D_1$ der Wand $B_1 D$ von der Flüssig-

keit her ausgeübten Druckes ermitteln. Man findet nämlich

$$X_{D_1} = \frac{1}{2}\int_{B_1}^{D_1}(1-e^{2q})\cos(nx)\,|dz|,$$

$$Y_{D_1} = \frac{1}{2}\int_{B_1}^{D_1}(1-e^{2q})\cos(ny)\,|dz|;$$

dabei beziehen sich jetzt die Winkel $(nx)$, $(ny)$ und $dz$ auf die Normale bezw. das Bogenelement der Wand $B_1 D$. Daraus ergibt sich, wie oben:

$$X_{D_1} + iY_{D_1} = \frac{1}{2i}\int_{B_1}^{D_1}(1-e^{2q})\,dz;$$

das Integral soll längs der Wand $B_1 D_1$ genommen werden.

Ich ersetze wieder hierin $dz$ durch $e^{it}\,df$ und bemerke, daß $e^{it+2q}$ wegen der Symmetrie der Funktion $t$ inbezug auf die reelle Achse den Wert der Funktion $e^{it}$ in dem symmetrisch gelegenen Punkte darstellt. Außerdem kann man ohne weiteres beweisen, wie wir vorhin in einem ähnlichen Fall gemacht haben, daß $df$ sich nicht ändert, wenn $s$ durchweg durch $\frac{q^2}{s}$ ersetzt wird; hierdurch gewinnt man die analoge Formel:

$$X_{D_1} + Y_{D_1} = \frac{1}{2i}\int_{D_1'}^{D_1} e^{it}\,dz,$$

wenn $D_1'$ den dem Punkte $D_1$ symmetrischen Punkt bedeutet (Fig. 6). Dieses Integral braucht nicht mehr über den Kreisbogen $D_1' D_1$ genommen zu werden, sondern der Integrationsweg darf irgendwie im Kreisring genommen sein, blos unter der Bedingung, daß das durch diesen Weg und den Kreisbogen $D_1' D_1$ berandete Gebiet keinen singulären Punkt des Ausdruckes $e^{it}\,df$ enthält.

Entsprechend hat man auf der Wand $B_2 D$ für ein endliches Stück $B_2 D_2$:

$$X_{D_2} = \frac{1}{2}\int_{B_2}^{D_2}(1-e^{2q})\cos(nx)\,|dz|,$$

$$Y_{D_2} = \frac{1}{2}\int_{B_2}^{D_2}(1-e^{2q})\cos(ny)\,|dz|$$

und also:

$$X_{D_2} + iY_{D_2} = \frac{1}{2i}\int_{D_2}^{B_2}(1-e^{2q})\,dz,$$

was schließlich zu der Formel führt:

$$X_{D_2'} + iY_{D_2} = \frac{1}{2i}\int_{D_2}^{D_2'} e^{it}\,df.$$

Fällt sowohl $D_1$ als auch $D_2$ mit $D$ zusammen, so hat man:

$$X_1 + X_2 + i(Y_1 + Y_2) = \frac{1}{2i}\int e^{it}\,df; \tag{13}$$

das Linienintegral ist längs des Kreises $|s| = q$ im negativen Sinne oder dem Kreisringe gegenüber im positiven Sinne genommen; übrigens ist es im allgemeinen unendlich groß wegen der singulären Punkte $D$ und $D'$. Die rechts in der Formel (12) und (13) stehenden Integrale unterscheiden sich untereinander durch die Residua der Funktion $\frac{1}{2i}e^{it}\frac{df}{ds}$ in dem Kreisringe ($|s| \leqq 1$, $|s| \geqq q$).

## § 9. **Eine Anwendung des Impulssatzes.**

Wir wollen, um eine rein formale Rechnung zu vermeiden, diese Beziehung mittelst des Impulssatzes aufstellen, und zwar in dem Falle, daß die Wände des Gefäßes dieselbe asymptotische Richtung besitzen, nämlich die der $Ox$-Achse (Fig. 7). Die Grenzen des zu betrachteten Gebietes $\mathfrak{G}$ sollen aus der $xy$-Ebene und einer

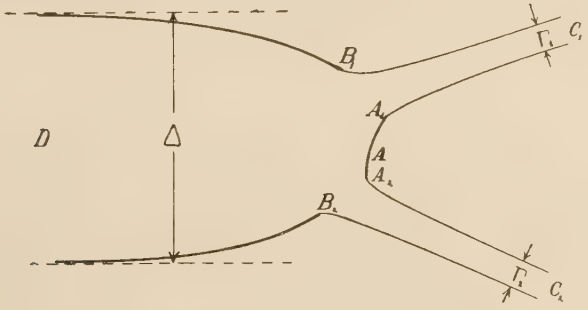


Fig. 7.

ihr parallel laufenden, dann aus den Wänden des Gefäßes genügend weit entfernt in der $D$-Richtung, wo sie bereits leidlich parallel geworden sind, aus den freien Grenzen $B_1C_1A_1$ und $B_2C_2A_2$ und schließlich aus zwei auf den freien Grenzen und $xOy$ senkrecht stehenden Ebenen in der Nähe von $C_1$ bezw. $C_2$ bestehen. Bei diesem Gebiete können wir sehr bequem die zeitliche Änderung des Impulses angeben. Sie werden nämlich durch Subtraktion des im Querschnitt des Gefäßes in der Nähe des Punktes $D$ ver-

$Q$ die sekundlich durch den Querschnitt $\Delta$ strömende Wassermenge bedeutet. Letztere ist eine endliche Größe, dagegen ist $(\mathfrak{V}_D)_m$ unendlich klein, sodaß das ganze Produkt unendlich klein wird.

Ich will noch bemerken, daß sich der Fall der Platte in einem Kanal als Sonderfall dieses Problems ergibt, sodaß z. B. der Widerstand, den die Platte in einem Kanal mit ebenen Wänden erfährt, sich aus der allgemeinen Formel (15) ableiten läßt, indem $\theta_1$ und $\theta_2$ gleich Null gesetzt werden. Man bekommt auf diese Weise:

$$W = \frac{\Delta}{2}(1 + V_D^2) - \pi(c + c'). \tag{15'}$$

Ist etwa $H$ die asymptotische den Wänden des Kanals senkrecht gemessene Breite, dann hat man $\pi(c + c') = \Delta - H$ und aus (16): $V_D = \frac{\Delta - H}{\Delta}$. Somit bekommt der Widerstand folgende einfache Gestalt:

$$W = \frac{H^2}{2\Delta}, \tag{17}$$

die Herr Cisotti und Villat durch direkte Rechnung finden[1]).

## § 10. Die charakterischen Eigenschaften der Funktion $t(s)$.

Wie wir gesehen haben, genügt es $t(s)$ zu bestimmen, um alle Fragen über unsere Strömung beantworten zu können. Diese Funktion ist regulär im ganzen Kreisringe ($|s| \leqq 1$, $s| \geqq q$), abgesehen von einigen Randpunkten: $A$, $D$ und von ihren inbezug auf die reelle Achse symmetrisch gelegenen Punkten $A'$, $D'$. Sie ist jedenfalls in einer in dem betrachteten Kreisringe konvergenten Laurentschen Reihe entwickelbar, jedoch können wir über die Konvergenz dieser Reihe auf dem ganzen Rande des Kreisringes vorläufig noch nichts aussagen; ferner sind die Koeffizienten dieser Laurentschen Entwicklung alle reell, da $t(s)$ auf der reellen Achse reell wird. Was das Verhalten der Funktion $t(s)$ in den obengenannten singulären Randpunkten betrifft, so können wir Folgendes sagen: Wenn sich der Punkt $s$ dem Punkte $A$ auf dem Kreise $|s| = 1$ (Fig. 6) von der Seite $A_2 A$ nähert, so nähert sich der Realteil $\theta$ der Funktion $t(s)$ dem Werte $\alpha - \pi$ (vgl. Fig. 1); kommt aber $s$ von der entgegengesetzten Seite nach $A$ zu, dann strebt $\theta$ dem Werte $\alpha$ zu. Auf dem Kreise $|s| = q$ hat $\theta$ ein ähnliches Verhalten, indem es sich den Werten $+\beta_2$, $-\beta_1$ nähert, wenn $s$ von der Seite von $B_2$ bezw. von $B_1$ her in $D$ ankommt. Für die symmetrischen Punkte $A'$ und $D'$ verhält sich $\theta$ symme-

1) a. a. O. auf S. 5 unter 3).

trisch in bezug auf die reelle Achse der $t$-Ebene. Um jetzt $t(s)$ eindeutig zu definieren müssen wir die Art der Singularität in den Punkten

$$s = e^{\pm i\varepsilon_0}, \quad s = e^{\pm i\varepsilon_1}$$

angeben; dieselbe wollen wir durch die folgenden Gleichungen festlegen:

$$t(s) = o\left(\frac{1}{s - e^{\pm i\varepsilon_0}}\right) = o\left(\frac{1}{s - q e^{\pm i\varepsilon_1}}\right).$$

## § 11. Die Hilfsfunktion $T(s)$.

Bequemer gestaltet sich das Problem der Auffindung der Funktion $t(s)$, wenn wir vorher eine andere analytische im Innern des Kreisringes reguläre Funktion $t_0(s) = \vartheta_0 + i\varrho_0$ bestimmen, sodaß $T(s) = t - t_0$ auf dem Rande des Kreisringes auch stetig bleibt; demgemäß muß der Realteil der Funktion $t_0(s)$ dieselben Unstetigkeiten in den Punkten $AA'DD'$ wie $t(s)$ aufweisen, d. h. $\vartheta_0$ hat in $A$ den Limes $\alpha - \pi$ oder $\alpha$, jenachdem man von $A_2$ oder von $A_1$ her in $A$ ankommt; ähnlich verhält sich $\vartheta_0$ in $D$, indem es den Limes $\beta_2$ oder $-\beta_1$ erreicht, jenachdem man in $D$ von $B_2$ oder $B_1$ her ankommt; in den symmetrischen Punkten $A'$, $D'$ verhält sich $\vartheta_0$ spiegelbildlich. Im übrigen soll $\vartheta_0$ überall auf dem Rande stetig und endlich bleiben, außerdem sollen die Gleichungen

$$t_0(s) = o\left(\frac{1}{s - e^{\pm i\varepsilon_0}}\right) = o\left(\frac{1}{s - q e^{\pm i\varepsilon_1}}\right)$$

gelten. Dann bleibt der Realteil $\Theta$ der Funktion $T(s)$ überall auf dem Rande stetig und endlich. Um die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion $T(s)$ zu sichern, wollen wir annehmen, daß sowohl ihr Realteil $\Theta$ als auch ihr Imaginärteil $\mathsf{P}$ endliche Ableitungen nach dem Bogen auf der Peripherie des Kreisringes besitzen.

## § 12. Bestimmung einer Funktion $t_0(s)$.

Ich betrachte die im Innern dieses Kreisringes harmonische Funktion $\vartheta_0$, welche überall auf dem Kreisbogen $A'A_2A$ (Fig. 6) den konstanten Wert $\alpha - \pi$ auf $AA_1A'$ den Wert $\alpha$, auf den Kreisbogen $D'B_2D$ den Wert $\beta_2$ und auf $DB_1D'$ den Wert $-\beta_1$ annimmt. Zu $\vartheta_0$ entspricht höchstens eine konjugiert harmonische eindeutige Funktion $\varrho_0$, sodaß $t_0 = \vartheta_0 + i\varrho_0$ von der Form

$$o\left(\frac{1}{s - e^{\pm i\varepsilon_0}}\right), \quad o\left(\frac{1}{s - q e^{\pm i\varepsilon_1}}\right)$$

ist, da die bei der Bestimmung von $\varrho_0$ additiv vorkommende Integrationskonstante durch die Symmetrie von $t_0(s)$ eindeutig bestimmt wird. Wie schon bemerkt, existiert aber im allgemeinen diese eindeutige konjungiert harmonische Funktion $\varrho_0$ nicht; die gegebenen Randwerte $\vartheta$ müssen vielmehr eine numerische Gleichung erfüllen, die wir uns vorläufig befriedigt denken wollen.

Die auf diese Weise gewonnene Funktion $t_0(s)$ erfüllt alle der im vorigen Paragraphen definierten Funktion auferlegten Bedingungen; ihre tatsächliche Bestimmung hängt von der Lösung einer einfachen Randwertaufgabe in dem betrachteten Kreisringe für die Gleichung $\Delta\vartheta_0 = 0$ ab; man findet nämlich $\vartheta_0$ durch einen Potenzansatz [1]). Neuerdings hat Herr Villat durch die Bestimmung der Koeffizienten einer Laurentschen Entwicklung direkt die Form von $t_0(s)$ gefunden [2]). Sind etwa allgemein $\Phi(\varepsilon)$, $\Psi(\varepsilon)$ die Randwerte der harmonischen Funktion $\vartheta_0$ auf dem Kreise $|s| = 1$ bezw. $|s| = q$, so existiert die analytische im Innern des Kreisringes ($|s| = 1$, $|s| = q$) reguläre Funktion $t_0(s)$ und besitzt bis auf eine rein imaginäre additive Konstante die Form:

$$
\begin{aligned}
t_0(s) = {} & \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon)\,\xi\left(\frac{\omega}{i\pi}\log s - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon \\
& - \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Psi(\varepsilon)\,\xi_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log s - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

wenn die Beziehung

$$
\int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \Psi(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{19}
$$

gilt; dabei sind $\xi$ und $\xi_3$ die bekannten Funktionen von Weierstraß. Im Falle der gesuchten Funktion $t_0(s)$ nehmen $\Phi(\varepsilon)$ und $\Psi(\varepsilon)$ folgende Werte an:

$$
\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} \alpha - \pi & \text{auf dem Kreisbogen } A' A_2 A \\ \alpha & \text{„ „ „ } A\, A_1 A' \end{cases}
$$

$$
\Psi(\varepsilon) = \begin{cases} \beta_2 & \text{„ „ „ } D' D_2 D \\ -\beta_1 & \text{„ „ „ } D\, D_1 D'. \end{cases}
$$

Die Beziehung (19) wird somit:

$$
\pi(\alpha - \varepsilon_0) = (\beta_1 + \beta_2)\,\varepsilon_1 - \pi\beta_1; \tag{IV}
$$

---

1) Siehe z. B. E. Picard, Traité d'Analyse, Bd. II, 2. Aufl., S. 105.

2) Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire, Rend. Pal., 1912, I.

für $t_0(s)$ findet man, indem man die Formel (18) anwendet:

$$t_0(s) = i\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log s - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log s + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0\right)} + (\beta_1+\beta_2)\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log s - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log s + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1\right)}$$

$$+ 2\eta\frac{\alpha\omega}{\pi^2}\log s + 2\eta\frac{\omega i}{\pi}(\varepsilon_0-\alpha) + \frac{2i\eta'\omega'\varepsilon_1}{\pi^2}\beta^2 \tag{20}$$

$$+ 2\frac{i\beta_1}{\pi}\eta'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log s + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1 - \omega'\right) + \alpha - \beta_1;$$

$\sigma$ und $\sigma_3$ sind die bekannten Weierstraßschen Funktionen und $\eta$, $\eta'$ die Konstanten $\zeta\omega$ bezw. $\zeta\omega'$. Man kann durch kleine Rechnungen verifizieren, daß $t_0(s)$ eine in dem betrachteten Kreisringe einwertige Funktion ist, wenn die Beziehung (IV) stattfindet; es handelt sich nämlich darum, zu zeigen, daß $t(s) \equiv t\left(se^{2i\pi}\right)$, was man mittelst der Identitäten:

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}.\sigma u, \quad \sigma_3(u+2\omega) = e^{2\eta(u+\omega)}.\sigma_3 u$$

erreicht.

## § 13. **Der Fall der ebenen Wände.**

Um die vollständige Lösung unseres Problems zu bekommen, müssen wir noch die oben eingeführte Funktion $T(s)$ bestimmen; durch deren Addition zu $t_0(s)$ erhalten wir dann die gesuchte Funktion $t(s)$. Zu jeder vorgegebenen krummen Kontur des Gefäßes und der Platte entspricht im allgemeinen eine eindeutig bestimmte Funktion $T(s)$; deren Bestimmung hängt, wie wir sehen werden, von einer komplizierten Randwertaufgabe der Potentialtheorie ab. Dagegen ist es leichter, eine beliebige, in dem Kreisringe ($|s| \geqq q$, $|s| \leqq 1$) reguläre Funktion zu bilden und dann die dazu entsprechende krumme Kontur zu konstruieren. Den einfachsten Fall bekommt man, indem man $T(s) = 0$, d. h. $t(s) = t_0(s)$ setzt. Die zu dieser Funktion passenden Wände des Gefäßes sind zwei Ebenen, welche in den Richtungen $-\beta_1$, $+\beta_2$ ins Unendliche laufen (Fig. 3); die Platte ist ebenfalls eine Ebene, deren Neigung gegen die $Ox$-Achse gleich $\alpha$ ist. Die sechs bisher noch unbekannten Parameter $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c$, $c'$ lassen sich durch die sechs numerischen Gleichungen (I), (II), (III) und (IV) bestimmen. Überhaupt läßt sich wenigstens theoretisch jede Größe kinematischer oder dynamischer Natur durch die oben angegebenen Beziehungen

berechnen; im besonderen bekommt man den auf die Platte ausgeübten Widerstand und Auftrieb durch die Formel (12).

Wir wollen den Fall $\beta_1 = \beta_2 = 0$, d. h. den Fall des mit parallelen Wänden versehenen Gefäßes näher betrachten (Fig. 8). Die Formel (20) wird dann:

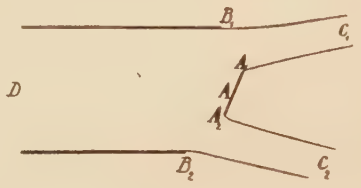

Fig. 8.

$$(20) \qquad t_0(s) = i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log s - \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log s + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_0\right)} + 2\eta \frac{\alpha\omega}{\pi^2} \log s + \alpha,$$

und die Bedingung (IV) reduziert sich auf folgende:

$$(IV') \qquad \varepsilon_0 = \alpha.$$

Auf dem Kreise $|s| = 1$, d. h. $s = e^{i\varepsilon}$ wird $t_0(s)$ durch die Gleichung:

$$t_0(e^{i\varepsilon}) = i \log \frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \varepsilon_0)\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + \varepsilon_0)\right\}} + 2i\eta \frac{\alpha\omega}{\pi^2} \varepsilon + \alpha$$

gegeben. Das linksstehende Glied hat einen eindeutigen Sinn, wenn man einen bestimmten Zweig der Funktion $\log \frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \varepsilon_0)\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + \varepsilon_0)\right\}}$ herausgreift; der Zweig, welcher uns paßt, ist derjenige, welcher für $\varepsilon = 0$ gleich $i\pi$ wird. Wenn man sich erinnert, daß die Funktion $\sigma$ für reelle Werte von $\varepsilon$ reell ist, dann sieht man, daß der Realteil von $t_0(e^{i\varepsilon})$ gleich $\alpha - \pi$ auf dem Bogen $A' A_2 A$ und gleich $\alpha$ auf $A' A_1 A$ ist. Der imaginäre Teil $\varrho_0$ hat den Wert:

$$(21) \qquad \varrho_0 = \log \frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{\pi}|\varepsilon - \varepsilon_0|\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + \varepsilon_0)\right\}} + 2\eta \frac{\alpha\omega}{\pi^2} \varepsilon,$$

sodaß der absolute Betrag der Geschwindigkeit:

$$(21') \qquad |\omega| = e^{\varrho_0} = \frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{\pi}|\varepsilon-\varepsilon_0|\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\varepsilon_0)\right\}} \cdot e^{\frac{2\eta\alpha\omega}{\pi^2}\varepsilon}$$

ist. Derselbe verschwindet in dem Punkte $A$ ($\varepsilon = \varepsilon_0$) sonst aber für keinen Wert von $\varepsilon$ im Intervalle $(0, \pi)$, d. h. $A$ ist der einzige Staupunkt auf der Platte $A_1 A_2$. Auf dem Teile $A A_1$ der Platte (Fig. 8) hat man $\pi \geqq \varepsilon \geqq \varepsilon_0$ und

$$\frac{d\varrho_0}{d\varepsilon} = \frac{\omega}{\pi}\left\{\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\varepsilon_0)\right] - \zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\varepsilon_0)\right] + 2\eta\frac{\alpha}{\pi}\right\}.$$

Diese Größe ist positiv. In der Tat: sie ist gleich[1])

$$-2\zeta\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \frac{\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}{\wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0} + 2\eta\frac{\alpha}{\pi},$$

wobei $p$ die elliptische Funktion zweiter Ordnung von Weierstraß bedeutet.

Nun ist bekanntlich $\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 < 0$, da $\varepsilon_0 < \pi$ ist und $\wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0$ ebenfalls kleiner als Null, sodaß der Quotient dieser Größen positiv ist; er nimmt übrigens monoton ab von $+\infty$ bis $\frac{\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}{e_1 - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}$, wenn $\varepsilon$ von $\varepsilon_0$ bis $\pi$ wächst; dabei bedeutet $e_1$ die Konstante $p\omega$. Ich will beweisen, daß sogar der Ausdruck

$$-2\zeta\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \frac{\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}{e_1 - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0} + 2\eta\frac{\alpha}{\pi}$$

positiv ist. Zu diesem Zwecke ersetze ich $\frac{\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}{e_1 - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}$ durch den gleichbedeutenden Ausdruck $2\left\{\zeta\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 - \zeta\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \pi\right) + \eta\right\}$. Es bleibt jetzt zu beweisen, daß

$$\eta\left(\frac{\varepsilon_0}{\pi} + 1\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \omega\right) > 0$$

1) Die Formeln, die ich hier anwende, findet man in irgend einem Buch über elliptische Funktionen, z. B. in Appell et Lacour, Traité des fonctions elliptiques.

ist; wir haben $\alpha$ durch $\varepsilon_0$ ersetzt. Dieser Ausdruck ist offenbar positiv, denn er verschwindet für $\varepsilon_0 = 0$ und seine Ableitung inbezug auf $\varepsilon_0$: $\frac{1}{\pi}\left\{\eta + \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \omega\right)\right\}$ bleibt positiv für jeden positiven Wert von $\varepsilon_0$. Der absolute Betrag $|w|$ der Geschwindigkeit nimmt infolgedessen monoton zu von $A$ bis $A_1$ (Fig. 7). In ähnlicher Weise kann man das monotone Zunehmen der Funktion $|w|$ auf dem Teile $AA_2$ beweisen. Deren Wert in $A_2$ ist 1, wie man unmittelbar sieht, wenn man in (21′) $\varepsilon$ gleich Null setzt; in $A_1$ wird $\varepsilon = \pi$ und also:

$$|w| = \frac{\sigma\left(\omega + \omega\frac{\varepsilon_0}{\pi}\right)}{\sigma\left(\omega + \omega\frac{\varepsilon_0}{\pi}\right)} e^{2\eta\frac{\alpha\omega}{\pi}},$$

d. h. in $A_1$ ist $|w|$ ebenfalls gleich 1, denn es gilt die Formel:

$$\frac{\sigma(u-\omega)}{\sigma(u+\omega)} = -e^{-2\eta u}.$$

Auf dem Kreise $|s| = q$, d. h. auf den Wänden des Gefäßes kann man das Verhalten des absoluten Betrages der Geschwindigkeit in ähnlicher Weise studieren. Der absolute Betrag $V_\infty$ der Geschwindigkeit im Unendlichen wird durch $\varepsilon = \varepsilon_1$ gegeben.

Nun wollen wir das Verhalten der Funktion $t_0(s)$ auf der freien Grenze $B_2C_2A_2$ (Fig. 8) betrachten. $s$ ist reell und wächst von $q$ bis 1; sein Logarithmus, den wir $\nu$ nennen wollen, wächst also von $i\pi\frac{\omega'}{\omega}$ bis Null. $t_0(s)$ nimmt die Form

$$t_0(s) = i\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\nu - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\nu - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0\right)} + 2\eta\frac{\alpha\omega}{\pi^2}\nu + \alpha$$

an, woraus man sieht, daß $t_0(s)$ eine reelle Größe ist. In der Tat ist die Ableitung von $t$ nach $\nu$ für jeden Wert von $\nu$ in dem betrachteten Intervalle reell, denn man hat:

$$(22)\qquad \begin{aligned}\frac{dt_0}{d\nu} &= \frac{\omega}{\pi}\left\{\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\nu - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\nu - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0\right)\right\} + 2\eta\frac{\alpha\omega}{\pi^2}\\ &= \frac{\omega}{\pi}\left\{-2\zeta\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \frac{\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}{\wp\frac{\omega}{i\pi}\nu - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}\right\} + 2\eta\frac{\alpha\omega}{\pi^2};\end{aligned}$$

anderseits ist aber $t$ für $v = 0$ offenbar reell, sodaß es im ganzen Intervalle $v = \left(0, i\pi\frac{\omega'}{\omega}\right)$ reell bleibt. Außerdem ist $\frac{dt_0}{dv}$ immer negativ, denn $\frac{\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}{\wp\frac{\omega}{i\pi}v - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}$ ist positiv und erreicht seinen größten Wert $\frac{\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}{e_3 - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}$ in $B_2$; dabei bedeutet $e_3$ die Konstante $\wp\omega'$. Man hat aber die Identität:

$$\frac{\wp'\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0}{e_3 - \wp\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0} = 2\left\{\zeta\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \eta' - \zeta\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \omega'\right)\right\},$$

sodaß der größte Wert von $\frac{dt_0}{dv}$ gleich:

$$2\frac{\omega}{\pi}\left\{\eta' + \eta\frac{\varepsilon_0}{\pi} - \zeta\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \omega'\right)\right\}$$

ist; dieser Ausdruck ist negativ, denn er verschwindet für $\varepsilon_0 = 0$ und $\varepsilon_0 = \pi$ und seine Ableitung inbezug auf $\varepsilon_0$:

$$\frac{2\omega}{\pi^6}\left\{\eta + \omega\wp\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_0 + \omega'\right)\right\}$$

ist monoton wachsend von dem negativen Werte $\frac{2\omega}{\pi^2}(\eta + \omega\wp\omega')$, den er für $\varepsilon_0 = 0$ hat, bis zu dem positiven $\frac{2\omega}{\pi^2}(\eta + \omega\wp\omega'')$ für $\varepsilon_0 = \pi$. Wir können daraus den folgenden physikalischen Schluß ziehen: Der Neigungswinkel der Tangente an der freien Grenze $A_2 C_2 B_2$ (Fig. 8) gegen die $Ox$-Achse bleibt immer zwischen Null und $\alpha - \pi$ und die freie Grenze hat nirgends einen Wendepunkt; dem Punkte $C_2$ (Fig. 8) entspricht also die zwischen Null und $\alpha - \pi$ befindliche asymptotische Richtung $\theta_2$ der freien Grenzen in $C_2$.

Ich will noch die Krümmung der freien Grenzen in den Punkten $A_2$, $B_2$ berechnen. Dieselbe ist gleich $\frac{d\theta}{|dz|}$ oder $\frac{dt_0}{|dz|}$, da $t_0 = \theta$ auf der freien Grenze ist. Den Wert von $dt_0$ können wir aus (22) entnehmen; er ist weder Null noch unendlich in diesen Punkten. Denjenigen von $|dz|$ berechnet man aus den beiden Beziehungen (11), woraus man sieht, daß $|dz|$ in $A_2$ und $B_2$ verschwindet. Infolgedessen ist der Krümmungsradius in $A_2$ und $B_2$

gleich Null. Das analoge bekommen wir für die freie Grenze $A_1 C_1 B_1$ durch eine ähnliche Rechnung.

Was den Widerstand anbelangt, so können wir ihn mittelst der Formel (15) berechnen. Der Auftrieb ist dadurch auch bekannt, denn der Gesamtdruck steht senkrecht auf der Platte; man hat infolgedessen

$$A = -W \cot \alpha.$$

Die Fälle, wo sowohl das Gefäß als auch die Platte selbst aus einer endlichen Anzahl von Ebenen bestehen, lassen sich in derselben Weise vollkommen erledigen; man darf jedoch aus physikalischen Gründen nur die nach der Flüssigkeit konkaven Winkel betrachten, denn in der Nähe eines konvexen Winkels wird die Geschwindigkeit unendlich groß, die wir wiederum durch eine Helmholtzsche Diskontinuitätsfläche vermeiden müssen, wenn wir konsequent sein sollten.

## § 14. **Die Bestimmungsgleichungen für** $T(s)$.

Um die allgemeine am Anfang dieses Teiles aufgestellte Aufgabe zu lösen, müssen wir die im § 11 eingeführte Hilfsfunktion $T(s)$ ermitteln. Dieselbe ist dadurch charakterisiert, daß sie regulär im ganzen Innern und auf dem Rande des Kreisringes ($|s| \leqq 1$, $|s| \geqq q$) ist, und daß sie die vorgegebenen krummen Wände liefern soll. Die Krümmung einer starren Wand ist eine bekannte Funktion von dem Winkel $\theta$, den die Tangente an der Wand mit der Richtung $Ox$ bildet, also auch von $\Theta = \theta - \theta_0$; es sei $k(\Theta)$ diese Funktion. Anderseits kann man aber diese Krümmung mittelst der Funktion $t(s)$ ausdrücken. Man hat in der Tat:

$$k(\Theta) = \frac{d\theta}{|dz|}. \tag{23}$$

$|dz|$ kann man aus den Beziehungen (11) berechnen; es ist z. B. auf der starren Wand $A_2 A A_1$ gleich:

$$(c + c') \frac{\omega}{\pi} \left| \frac{F . \sqrt{P(F)}}{(c_1 + F)(c_2 + F)} \right| e^{-\varrho} . d\varepsilon.$$

Dabei ist $F$ eine bekannte Funktion von $s$, also von $\varepsilon$, sodaß die Gleichung (23) folgendermaßen umgestaltet werden kann:

$$\frac{d\Theta}{d\varepsilon} = \chi(\varepsilon)\, k(\Theta)\, e^{-P} \tag{24}$$

mit

$$\chi(\varepsilon) = (c+c')\frac{\omega}{\pi}\cdot\left|\frac{F\cdot\sqrt{P(F)}}{(c_1-F)(c_2+F)}\right| e^{-\varrho_0}.$$

Hierfür haben wir folgende Identitäten benutzt:

$$d\vartheta = d\Theta, \quad \varrho = \varrho_0 + \mathsf{P}.$$

Im übrigen ist $t_0$ eine durch die Beziehung (20) gegebene Funktion von $\varepsilon_0$. Die Gleichung (24) gilt auf der oberen Hälfte des Einheitskreises $|s| = 1$. Für die untere Hälfte dieses Kreises hat man das gespiegelte Verhalten für die Funktion $T = \Theta + i\mathsf{P}$. Man bekommt durch eine ähnliche Überlegung, indem man die Krümmung der starren Wände $B_1 D B_2$ heranzieht, dieselbe Gleichung für die Peripherie des Kreises $|s| = q$. Ferner muß $\Theta$ verschwinden in den Punkten $A$ und $D$.

Die Ermittelung der Funktion $T(s)$ bildet also eine komplizierte Randwertaufgabe von dem Riemann-Hilbertschen Typus [1]). Ich habe vor kurzem den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für den Fall, wo das Existenzgebiet der schlichte Einheitskreis ist, gebracht. Der Ausgangspunkt dieses Beweises bildet eine von Herrn Prof. v. Kármán herrührende Idee, die Gleichung (24) nach sukzessiven Annäherungen zu behandeln. Die Methode leistet sogar für schwache Krümmungen die numerische Lösung des allgemeinen Problems. Die Entwicklungen hiervon werden demnächst erscheinen.

---

1) Riemann, Dissertation Göttingen; Hilbert, Grundzüge einer allgem. Theorie d. Integralgleichungen.

## Zweiter Teil.

# Vergleich der Widerstandsmessungen in einem Kanal und in einem Luftstrahl.

### Einleitung.

Die verschiedenen hydrodynamischen Ansätze zur Behandlung des Widerstandsproblems vermögen uns keine Schlüsse von praktischer Bedeutung über den Verlauf der Bewegung und über die Größe der da auftretenden Kräfte zu geben. Für die meisten Forderungen der Praxis bleibt man auf das Experiment angewiesen; man läßt einen Strom in einem Kanal (wie in der Göttinger Versuchsanstalt) fließen oder einen freien Strahl aus einer Düse (wie in der Eiffelschen Versuchsanstalt) gegen den Körper strömen und mißt dann die hydrodynamischen Drucke. Die auf diese Weise erhaltenen Zahlen werden mangels etwas besseren als in der in allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit geltend betrachtet. Die Aufgabe des zweiten Teiles dieser Arbeit soll die Bestimmung der Abweichungen jeder von diesen zwei Versuchsarten von dem Verhalten in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit sein; dabei soll überall die zweidimensionale Helmholtzsche Bewegung zugrunde gelegt sein.

Es wird zunächst die symmetrische Strömung aus einer Düse mit ebenen Wänden gegen eine Platte behandelt; durch Spezialisierung bekommt man den Fall der Platte in einem Kanal mit parallelen, ebenen Wänden. Wegen der Symmetrie der ganzen Bewegung erfährt das Problem bedeutende Vereinfachungen; prinzipiell aber hat man dieselbe funktionentheoretische Aufgabe, wie in dem ersten Teil dieser Arbeit zu lösen. Aus diesem Grunde werden wir die verschiedenen konformen Abbildungen weniger eingehend besprechen.

## § 1. Die Eiffelsche Einrichtung.

Aus einer symmetrischen Düse (Fig. 9) kommt ein Strahl $B_1 C_1 B_2 C_2$ heraus und stößt gegen eine senkrecht zur Strömungs-

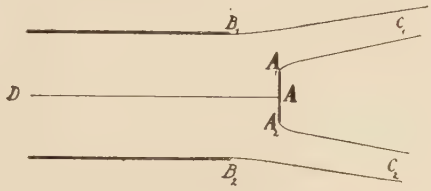


Fig. 9.

richtung in der Mitte der Strömung gestellte ebene Platte $A_1 A_2$. Die Rechnung wollen wir dadurch vereinfachen, daß wir die Stromlinie $D A$ als starre Wand betrachten. Hat das komplexe Potential $f = \varphi + i\psi$ den Wert Null in $A$, so wird das in der $f$-Ebene entsprechende Gebiet durch die Fig. 10 dargestellt sein. Es sei $a$ der Abstand $A A_1$ in der $f$-Ebene, d. h. der Wert des Geschwindigkeitspotentials $\varphi$ in $A_1$ und $(b, \pi c)$ die Koordinaten des Punktes $B_1$ ebenfalls in der $f$-Ebene, d. h. die Werte des Geschwindigkeitspotentials $\varphi$ und der Stromfunktion $\psi$ in $B_1$. Dieser Streifen in der $f$-Ebene wird durch die Beziehung

$$f = c \log \frac{mF + n}{F + n} \tag{25}$$

konform auf die obere Hälfte der $F$-Ebene (Fig. 10) abgebildet; dabei sind:

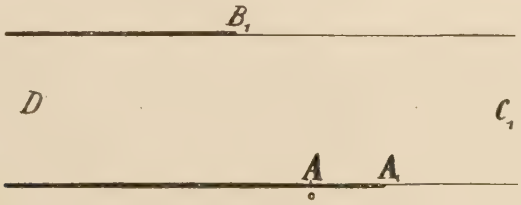


Fig. 10.

$$m = \frac{e^{\frac{a}{c}} - e^{\frac{b}{c}} + 2e^{\frac{a+b}{c}}}{e^{\frac{b}{c}} - e^{\frac{a}{c}} + 2}, \qquad n = \frac{e^{\frac{a}{c}} + e^{\frac{b}{c}}}{e^{\frac{b}{c}} + e^{\frac{a}{c}} + 2}. \tag{26}$$

Es gelten die Ungleichungen:

$$0 < \frac{n}{m} < 1,$$

sodaß der durch die Beziehung

$$\frac{n}{m} = \cos \varepsilon_0 \tag{26'}$$

definierte Winkel $\varepsilon_0$ reell zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ angenommen werden darf. Wie in dem ersten Teil dieser Arbeit werden wir die dort durch die Gleichung (1) definierte Funktion $t = \vartheta + i\varrho$ zu ermitteln versuchen; ihr Realteil $\vartheta$ gibt den Neigungswinkel der Geschwindigkeit gegen die $Ox$-Achse und ihr Imaginärteil $\varrho$ den Logarithmus des absoluten Betrages der Geschwindigkeit an. Aus Gründen, die wir in dem ersten Teil ausführlich erörtert haben, ist $t$ eine reguläre analytische Funktion von $F$ in der oberen Halbebene $\Im(F) \geqq 0$. Auf dem Teil $A_1 \infty C B_1$ von dem Rande dieses Gebietes ist $\varrho = 0$, da wir den konstanten absoluten Betrag der Geschwindigkeit auf den freien Grenzen gleich 1 setzen wollen. Ferner haben wir $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ auf der Strecke $A A_1$ und $\vartheta = 0$ auf $B_1 D A$. Wir haben also mit einer gemischten Randwertaufgabe zu tun, die wir durch einen ähnlichen Kunstgriff, wie in dem ersten Teile dieser Arbeit, auf eine gewöhnliche Randwertaufgabe zurückführen wollen. Wir bilden nämlich zuerst die positive Halbebene $\Im(F) \geqq 0$ auf das Innere eines Halbkreises in der $s$-Ebene konform ab, sodaß die Strecke $B_1 A_1$ auf den Halbkreis selbst und das Stück $A_1 \infty C_1 B_1$ auf den Durchmesser abgebildet wird (Fig. 11). Dies erreicht man durch die Beziehung:

$$F = -\frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right) \tag{27}$$

oder

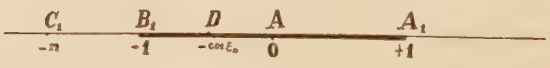


Fig. 11.

$$s = -F + \sqrt{F^2 - 1}. \tag{27'}$$

$s$ ist also eine mehrdeutige Funktion $F$ mit den Verzweigungspunkten $F = \pm 1$; wenn wir diese beiden Punkte durch kleine, oberhalb der reellen Achse situierte Halbkreise ausschließen und einen bestimmten Zweig der Funktion $s(F)$ herausgreifen, dann bleibt sie in der ganzen oberen Hälfte der $F$-Ebene eindeutig. Wir wollen denjenigen Zweig der Funktion $s(F)$ betrachten, welcher den Wert $+i = e^{+\frac{\pi}{2} i}$ annimmt, wenn $F$ auf irgend einem in der oberen Hälfte der $F$-Ebene enthaltenen Wege in 0 ankommt.

Dem Halbkreise $B_1 D A A_1$ (Fig. 12) entspricht in der $F$-Ebene die Strecke $B_1 D A A_1$, denn $s$ ist gleich $e^{i\varepsilon}$ in diesem Falle, wenn $\varepsilon$

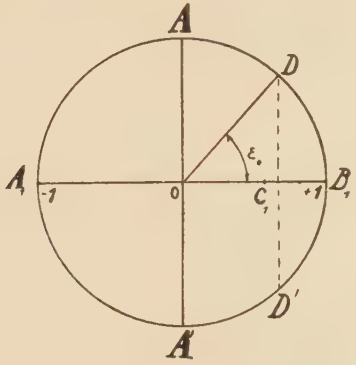


Fig. 12.

das Argument der Veränderlichen $s$ bedeutet und also $F = -\cos\varepsilon$, wie sich aus der Beziehung (27) ergibt; der Winkel $D O B_1$ ist gerade der oben definierte Winkel $\varepsilon_0$. Ebenso einfach sieht man ein, daß sich die geradlinigen Strecken $A_1 B$ in der $s$-Ebene und $A_1 \infty C B_1$ in der $F$-Ebene entsprechen. Im übrigen entspricht der positive Laufsinn in der $F$-Ebene bezgl. ihrer oberen Hälfte dem positiven Laufsinn längs des Randes in der $s$-Ebene inbezug auf das Innere des betrachteten Halbkreises, woraus man schließen darf, daß die Beziehung (27) die obere Halbebene $\Im(F) > 0$ auf das Innere des Halbkreise in der $s$-Ebene konform abbildet. Die gesuchte Funktion $t$, welche jetzt das Innere dieses Halbkreises als Regularitätsgebiet besitzt, hat ihren Imaginärteil gleich Null auf der Strecke $A_1 B_1$ der reellen Achse in der $s$-Ebene. Sie kann also unter diese Achse mittelst des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes analytisch fortgesetzt werden. Das neue Regularitätsgebiet der Funktion $t(s)$ wird das Innere des vollen Kreises $|s| = 1$ sein. Ihr Realteil $\vartheta$ nimmt den konstanten Wert $\frac{\pi}{2}$ auf dem Kreisbogen $A_1 A$ und den Wert Null auf $A D B_1$ an. Auf dem unteren Halbkreis bekommt man das Verhalten von $\vartheta$ durch analytische Spiegelung.

Nun können wir die im Innern des Kreises $|s| = 1$ harmonische Funktion $\vartheta$ bestimmen, und somit die Funktion $t(s)$ selbst bis auf eine additive Konstante, welche übrigens durch die Symmetrieeigenschaft der Funktion $t(s)$ eindeutig bestimmt ist. Die Schwarzsche Formel[1]), welche die Funktion $t(s)$ direkt durch die

1) Siehe S. 19 Anm. 1.

Randwerte $\overline{\theta}(\varepsilon)$ ihres Realteiles $\theta$ angibt, liefert:

$$t(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \overline{\theta}(\varepsilon)\frac{1-s^2}{1-2s\cos\varepsilon+s^2}\cdot d\varepsilon,$$

wobei

$$\overline{\theta}(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq \varepsilon < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{„} \quad \dfrac{\pi}{2} < \varepsilon \leqq \pi \end{cases}$$

ist. In dem Punkte $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ ist die Randfunktion $\overline{\theta}$ nicht erklärt; da bleibt sie aber endlich und somit ist die Existenz der oben angegebenen Form von $t(s)$ gesichert. Die Rechnung gibt:

$$t(s) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{s-i}{1-si}\right). \tag{28}$$

Mittelst dieser Funktion kann man jede kinematische oder dynamische Größe berechnen.

## § 2. Die Bestimmungsgleichungen für die Parameter $a$, $b$, $c$.

Man hat, wie in dem ersten Teil dieser Arbeit für das Linienelement $|dz|$:

$$|dz| = \frac{|df|}{|w|};$$

auf $AA_1$ ist $|df|$ reell und positiv und

$$w = e^{\varrho}.e^{-i\frac{\pi}{2}} = |w|.e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Daraus hat man die Beziehung:

$$|dz| = \frac{df}{w}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

auf $AA_1$. Man erhält aber aus (25)

$$df = \frac{c(n-\cos\varepsilon_0)}{(F+\cos\varepsilon_0)(F+n)}\cdot dF.$$

Ersetzen wir hierin $F$ kraft der Beziehung (27) durch $-\cos\varepsilon$, so bekommen wir:

$$df = \frac{c(n\cos\varepsilon_0).\sin\varepsilon}{(\cos\varepsilon_0-\cos\varepsilon)(n-\cos\varepsilon)}\cdot d\varepsilon,$$

somit hat man für $|dz|$ auf $AA_1$ den Ausdruck:

$$dz = \frac{c(n-\cos\varepsilon_0).\sin\varepsilon}{(\cos\varepsilon_0-\cos\varepsilon)(n-\cos\varepsilon)} e^{i\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} d\varepsilon;$$

Dabei ist $e^{i\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$ durch den sich aus (28) ergebenden Wert:

$$\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

zu ersetzen. Sodann erhält man für die Länge $\frac{d}{2}$ der Platte $AA_1$:

$$\frac{d}{2} = \int_A^{A_1} |dz| = c(n-\cos\varepsilon_0)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\varepsilon\cdot\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot d\varepsilon}{(\cos\varepsilon_0-\cos\varepsilon)(n-\cos\varepsilon)}$$

oder, wenn man $\operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = u$ setzt:

$$(29)\quad \frac{d}{2} = 2c(n-\cos\varepsilon_0)\int_0^1 \frac{(1-u^2).du}{u^{\frac{1}{2}}[(1+u^2)\cos\varepsilon_0+2u][n(1+u^2)+2u]}.$$

Andere zwei Gleichungen zur Bestimmung der Parameter $a, b, c$ erhält man, wenn man die bekannten Koordinaten $\left(x_0, \frac{D}{2}\right)$ des Punktes $B_1$ (Fig. 9) mittelst $t(s)$ ausdrückt. Dabei bedeutet $D$ den Durchschnitt $B_1B_2$ (Fig. 9) des Tunnels. Die Koordinaten $x, y$ irgend eines Punktes $M$ in der $z$-Ebene werden durch die Gleichung:

$$z = x+iy = \int_A^M \frac{df}{w}$$

gegeben, wobei der Integrationsweg von $A$ bis $M$ innerhalb des Halbkreises in der $s$-Ebenen verläuft. Auf diese Weise bekommt man den folgenden Ausdruck für die Koordinaten $x_0$, $\frac{D}{2}$ des Punktes $B_1$:

$$(30)\quad x_0+i\frac{D}{2} = c(n-\cos\varepsilon_0)\int_{s=i}^{s=1}\left(\frac{s-i}{1-si}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{dF}{(F+\cos\varepsilon_0)(F+n)};$$

dabei sind $F$ und $dF$ durch die Beziehung (27) gegeben. Wir wollen nebenbei bemerken, daß man die Formel (29) in derselben Weise bekommen könnte.

Der Integrationsweg in der Formel (30) ist irgend eine analytische, in dem Regularitätsgebiet der Funktion $t(s)$ enthaltene, die beiden Punkte $i$ und 1 verbindende Kurve; wir nehmen als solche den Kreisbogen $A\,D$ (Fig. 12) bis auf den singulären Punkt $D$, den wir durch einen kleinen Halbkreis nach innen vermeiden. Dann kann man (30) folgendermaßen umgestalten:

$$x_0 + i\frac{D}{2} = c(n - \cos\varepsilon_0)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\varepsilon \cdot \left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}{(\cos\varepsilon_0 - \cos\varepsilon)(n - \cos\varepsilon)} \cdot d\varepsilon$$

$$+ i\pi c\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Das letzte Glied rechter Hand ist das Resultat der Integration längs des kleinen Halbkreises um den Punkt $D$, also das halbe Residuum des Integranten in diesem Punkte. Das Integral rechter Hand soll seinen Cauchyschen Hauptwert darstellen; der singuläre Punkt dabei ist $\varepsilon = \varepsilon_0$ (d. h. $D$), wie es zu erwarten war. Im übrigen ist dieses Integral reell, sodaß man schreiben kann:

$$(30') \quad \begin{cases} x_0 = c(n - \cos\varepsilon_0)\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\varepsilon \cdot \left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}{(\cos\varepsilon_0 - \cos\varepsilon)(n - \cos\varepsilon)} \cdot d\varepsilon, \\ \dfrac{D}{2} = \pi c\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Für die letzte von diesen zwei Gleichungen hat man unmittelbar eine physikalische Deutung; die Geschwindigkeit in dem Punkte $D$ im Unendlichen ist nämlich gleich $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4}\right)}$, die man aus (28) herleiten kann, und das Produkt $\frac{D}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$ stellt gerade die Hälfte der sekundlich ins Gefäß hereingekommene Wassermenge dar, die offenbar gleich der Differenz $\pi c$ der Werte der Stromfunktion auf den Stromlinien $D\,B_1\,C_1$ und $D\,A\,A_1\,C_1$ ist.

## § 3. **Die Gleichungen zur Bestimmung der drei Parameter** $a, b, c$.

Durch die Funktion $t(s)$ lassen sich sämtliche Bewegungsparameter ausdrücken; die dazu gehörigen Werte enthalten dennoch die Konstanten $a, b, c$ als unbekannte Parameter. Dieselben

lassen sich mittelst der drei Gleichungen (29) und (30′) bestimmen. Durch die Ausführung der Quadratur erhält man aus (29), wenn man $c$ durch seinen aus (30′) entnommenen Wert

$$(30'') \qquad c = \frac{D}{2\pi} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$$

ersetzt:

$$(A) \quad \frac{\pi}{2}\lambda^2 \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$$
$$+ \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} - \sin\alpha \log\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$
$$- \frac{\pi}{2}\cos\alpha;$$

dabei bedeutet $\alpha$ den durch die Gleichung:

$$(11) \qquad \cos 2\alpha = \frac{1}{n}$$

definierten, im Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ enthaltene Winkel und $\lambda^2$ das Verhältnis $\frac{d}{D}$. In ähnlicher Weise ergibt sich aus (30′):

$$(B) \qquad -\xi \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$$
$$= \left\{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} + \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}\right\} \log\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} - 1}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} - 1}\right)$$
$$- 2\cos\alpha \log\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) - \pi \sin\alpha.$$

$\xi$ ist an Stelle der Größe $-2\pi\frac{x_0}{D}$ gesetzt worden; es mißt die in $\frac{D}{2\pi}$ Einheiten ausgedrückte Entfernung des Staupunktes $A$ (Fig. 9) von der Projektion $B$ des Punktes $B_1$ auf der $Ox$-Achse und ist positiv oder negativ je nachdem $A$ sich rechts oder links von $B$ befindet.

(A) und (B) stellen zwei Gleichungen zur Bestimmung der Parameter $\varepsilon_0$ und $\alpha$ dar; mittelst (30″) hat man alsdann $c$ und durch (26′) und (26) die Größen $a$ und $b$ selbst.

## § 4. Die verschiedenen geometrischen und kinetischen Parameter der Bewegung.

Der durch die Beziehung (26′) definierte Winkel $\varepsilon_0$ wird sehr klein, wenn $D$ ins Unendliche wächst, denn dann wird $c$ sehr groß und also sowohl $m$ als auch $n$ werden beinahe gleich 1. Anstatt $\varepsilon_0$ wollen wir einen neuen Parameter $\varkappa$ einführen, derart daß

$$\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = 1+\varkappa$$

ist; $\varkappa$ darf infolgedessen als sehr klein angenommen werden, wenn $D$ sehr groß ist.

Die Geschwindigkeit $V_D$ im Punkte $D$ bekommt man aus (28); es ergibt sich:

$$V_D = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$$

oder durch den neu eingeführten Parameter $\varkappa$ ausgedrückt:

$$V_D = \frac{1}{1+\varkappa}. \tag{32}$$

Den Winkel $\theta_c$, den der Strahl im Punkte $C_1$ mit der Achse einschließt, bekommt man ebenfalls aus (28) für $F = -n$, d. h. $s = n-\sqrt{n^2-1}$; rechnet man das aus, so bekommt man:

$$\theta_c = \alpha. \tag{33}$$

Für den gegen die Platte $A_2 A_1$ ausgeübte Widerstand $W$ werden wir die Formel (15) aus dem ersten Teile unserer Arbeit benutzen. Wir bekommen somit:

$$W = \frac{D}{2}(1+V_D^2) - 2\pi c\cos\alpha.$$

Ersetzen wir $2\pi c$ durch $D.V_D$ und $\cos\alpha$ durch $1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so bekommen wir:

$$W = \left\{(1-V_D)^2 + 4V_D\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}\frac{D}{2}$$

oder wenn wir anstatt $V_D$ seinen durch (32) angegebenen Wert nehmen:

$$W = \left\{\frac{\varkappa^2}{(1+\varkappa)^2} + 4\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varkappa}\right\}\frac{D}{2}. \tag{34}$$

Bei den Eiffelschen Versuchen bezieht man den Widerstand auf die Geschwindigkeit, welche auf der freien Grenze herrscht, d. h. auf 1 in unserem Falle; infolgedessen ist $\frac{W}{d}$ gleich dem dimensionslosen Faktor $\Psi$ [1]), den wir $\Psi_E$ nennen wollen:

$$\Psi_E = \left\{ \frac{\varkappa^2}{(1+\varkappa)^2} + 4 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\varkappa} \right\} \frac{1}{2\lambda^2}. \tag{35}$$

Im Falle des in der $x$-Richtung unendlich ausgedehnten Kanals wird $\alpha = 0$, denn $b$ wird unendlich groß uns also $n = 1$, wie es sich aus der Gleichung (26) ergibt. Die Widerstandsformel lautet in diesem Falle:

$$W = \frac{\varkappa^2 D}{2(1+\varkappa)^2}.$$

Bei den Versuchen der Göttinger Anstalt könnte man daran denken, diese Widerstände auf die Geschwindigkeit in $D$ zu beziehen, d. h. auf $V_D = \frac{1}{1+\varkappa}$; dividiert man $W$ durch $V_D$ und durch $d$, so erhält man den dimensionslosen Faktor $\Psi$, den wir $\Psi_k$ nennen wollen:

$$\Psi_k = \frac{\varkappa^2}{2\lambda^2}. \tag{36}$$

Auf den Vorschlag von Prof. Prandtl bezieht man jedoch den gefundenen Widerstand auf die Geschwindigkeit in einiger Entfernung hinter dem Körper, oder was hier dasselbe ist, auf die Geschwindigkeit an der freien Grenze, d. h. auf 1. Den entsprechenden Zahlenfaktor $\Psi'_k$ bekommt man, indem man den Wert des Widerstandes blos durch $d$ dividiert:

$$\Psi'_k = \frac{\varkappa^2}{2\lambda^2(1+\varkappa)^2}. \tag{36'}$$

Wir wollen noch den Fall des vollkommen freien Strahles betrachten, d. h. $b = \infty$; aus (26) erhalten wir $m = n$, also $\varepsilon_0 = 0$ und infolgedessen $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = 1$. Der Widerstand wird also

1) Betreffs dieser Bezeichnung siehe Ludw. Prandtl, Bemerkungen über Dimensionen und Luftwiderstandsformeln, Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1910.

durch die Formel (34) gegeben, wo wir $\varkappa = 0$ setzen müssen: Der entsprechende dimensionslose Faktor $\Psi_s$ ergibt sich durch Division des Widerstandes durch $d$:

$$\Psi_s = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\lambda^2}. \tag{37}$$

Diese letzte Gleichung kann man unmittelbar aus der Figur 13 ablesen. Die zeitliche Änderung der $x$-Komponente des Impulses ist nämlich $-D+(\Gamma_1+\Gamma_2)\cos\alpha$; diese Größe muß nach dem Impulssatze gleich der $x$-Komponente der Kraft sein, welche von außen auf die Flüssigkeit ausgeübt wird: $-\Psi_s$. Daraus erhält man die Gleichung (37), wenn man die Kontinuitätsgleichung

$$D = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

berücksichtigt.

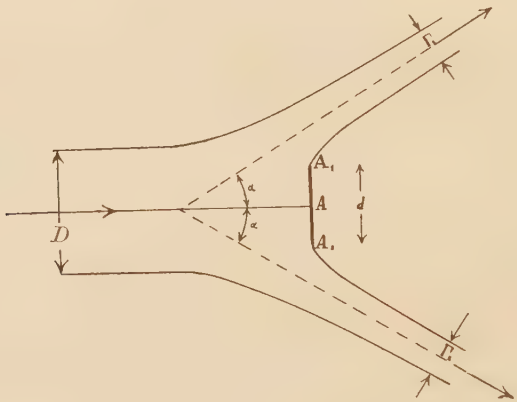


Fig. 13.

## § 5. Die Bestimmung von $\varkappa$ und $\alpha$.

Diese beiden Größen werden in dem allgemeinen Falle mit Hilfe der Gleichungen (A) und (B) bestimmt. Zu diesem Zwecke werden wir die verschiedenen in (A) und (B) auftretenden Funktionen von $\varepsilon_0$ und $\alpha$ durch Potenzreihen nach $\varkappa$ und $\alpha$ ersetzen; $\alpha$ wird nämlich auch sehr klein, wenn $D$ stark wächst, denn $n$ wird in diesem Falle nahezu gleich 1, wie die zweite von den Formeln (26) zeigt.

Man hat

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \operatorname{arctg}(1+\varkappa) = \frac{\pi}{4}+\frac{\varkappa}{2}-\frac{\varkappa^2}{4}+\frac{\varkappa^3}{12} \pmod 5;$$

durch (mod. 5) wollen wir andeuten, daß die höheren ganzen Potenzen von $\varkappa$ als die vierte vernachlässigt worden sind. Ferner hat man:

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\varkappa}{2} + \frac{\varkappa^2}{4} - \frac{\varkappa^3}{12} \text{ (mod. 5)}$$

und:

$$\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \frac{1}{1+\varkappa} = 1 - \varkappa + \varkappa^2 - \varkappa^3 + \varkappa^4 \text{ (mod. 5)}$$

sodaß die Beziehung:

$$\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} + \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \varkappa^2\left(1+\frac{\pi}{4}\right) - \varkappa^3\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{11+3\pi}{12}\varkappa^4 \text{ (mod. 5)}$$

gilt. Außerdem können wir schreiben:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \text{ (mod. 5)},$$

$$\log\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} = -\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \text{ (mod. 5)},$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} \text{ (mod. 5)}$$

und also:

$$\sin\alpha \,.\log\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} + \frac{\pi}{2}\cos\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha^2\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{48}\alpha^4 \text{ (mod. 5)}.$$

Führt man diese Werte in die Gleichung (A) ein, so erhält man

$$\text{(A')}\quad 2\pi\frac{1+\varkappa}{4+\pi}\lambda^2 = \varkappa^2 + \alpha^2 - \varkappa^3 + \frac{11+3\pi}{3(4+\pi)}\varkappa^4 - \frac{\pi}{12(4+\pi)}\alpha^4 \text{ (mod. 5)}.$$

Durch ähnliche Reinentwicklungen bekommt man aus (B):

$$\text{(B')}\quad -\xi(1+\varkappa) = \log\frac{\varkappa^2}{\alpha^2} - \varkappa - \alpha\pi + \varkappa^2\log\frac{\varkappa}{2} + \alpha^2\log\frac{\alpha}{2} + \frac{\varkappa^2}{4} - \frac{\alpha^2}{6} \text{ (mod. 3)}.$$

Die Größe $\lambda$ wollen wir als sehr klein ansehen. Dagegen werden wir die Größenordnung des Verhältnisses $\xi$ vollkommen willkürlich lassen; es wird in der Tat sogar unendlich groß, wenn sich die

Wände des Gefäßes bis ins Unendliche in der positiven Richtung der $x$-Achse ausdehnen (Kanal), oder wenn das Gefäß vollkommen nach links (Fig. 13) verschwindet (der Fall des vollkommen freien Strahles). Diese beiden extremen Fälle wollen wir ausschließen und annehmen, daß $\lambda\xi = -2\pi\frac{d}{D}\cdot\frac{x_0}{D}$ immer noch sehr klein angenommen werden darf. Setzen wir etwa:

$$\varkappa = \varkappa_1(1+\varkappa'), \quad \alpha = \alpha_1(1+\alpha')$$

wobei $\varkappa'$ und $\alpha'$ zwei kleine Korrektionen bedeuten, so erhalten wir aus (B′)

$$\frac{\varkappa_1^2}{\alpha_1^2} = e^{-\xi}$$

und aus (A′)

$$\varkappa_1^2 + \alpha_1^2 = \frac{2\pi}{4+\pi}\lambda^2,$$

indem wir die Größen gleicher Ordnung gleich setzen. Daraus ergibt sich:

$$(38)\qquad \begin{cases} \varkappa_1^2 = \dfrac{2\pi\lambda^2}{(4+\pi)(1+e^{\xi})}, \\ \alpha_1^2 = \dfrac{2\pi\lambda^2}{(4+\pi)(1+e^{-\xi})}. \end{cases}$$

Setzen wir ferner:

$$\varkappa' = \varkappa_2(1+\varkappa''), \quad \alpha' = \alpha_2(1+\alpha''),$$

führen diese Werte in (A′) und (B′) ein und greifen wieder die Glieder gleicher Größenordnung heraus, so bekommen wir:

$$(39)\qquad \begin{cases} \varkappa_2 + \alpha_2 e^{\xi} = \dfrac{2+e^{\xi}}{2}\varkappa_1 \\ \varkappa_2 - \alpha_2 = \left(1-\xi+\pi e^{\frac{\xi}{2}}\right)\dfrac{\varkappa_1}{2}. \end{cases}$$

In derselben Weise können wir die ersten Annäherungen $\varkappa_3$ und $\alpha_3$ der Größen $\varkappa''$ bezw. $\alpha''$ berechnen. Es ergibt sich:

$$(40)\qquad \begin{cases} 2(\varkappa_2\varkappa_3 + e^{\xi}\alpha_2\alpha_3) = (4+e^{\xi})\varkappa_1\varkappa_2 - \varkappa_2^2 - \alpha_2^2 e^{\xi} - \dfrac{44+12\pi-\pi e^{\xi}}{12(4+\pi)}\varkappa_1^2 \\ 2(\varkappa_2\varkappa_3 - \alpha_2\alpha_3) = (1-\xi)\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 - \alpha_2^2 + \pi\alpha_1\alpha_2 - \varkappa_1^2\log\dfrac{\varkappa_1}{2} + \dfrac{1}{4}\Big) \\ \qquad\qquad - \alpha_1^2\left(\log\dfrac{\alpha_1}{2} - \dfrac{1}{6}\right); \end{cases}$$

dabei haben wir angenommen, daß $\varkappa_1^2$, $\alpha_1^2$, $\varkappa_1^2 \log \varkappa_1$, $\alpha_1^2 \log \alpha_1$ kleine Größen von derselben Größenordnung sind. Das Erscheinen dieser letzten Größen in der Berechnung angenäherter Werte von $\varkappa$ und $\alpha$ hat uns verhindert für $\varkappa$ und $\alpha$ von vornherein Entwicklungen nach Potenzen von $\lambda$ anzusetzen; in der Tat verträgt sich die Gleichung (B) mit keinem solchen Potenzansatz. Jedenfalls kann man auf ähnliche Weise jede gewünschte Aproximation berechnen.

Im Falle des Kanals hat man, wie oben gemerkt, $n = 1$, also $\alpha = 0$; die Gleichung (A) oder (A′) sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{2\pi}{4+\pi}(1+\varkappa)\lambda^2 = \varkappa^2 - \varkappa^3 + \frac{11+3\pi}{3(4+\pi)}\varkappa^4,$$

woraus man durch Vergleich der Größen gleicher Größenordnung bekommt:

$$(41) \qquad \varkappa_1^2 = \frac{2\pi\lambda^2}{4+\pi}, \quad \varkappa_2 = \varkappa_1, \quad \varkappa_3 = \frac{25+6\pi}{6(4+\pi)}\varkappa_1.$$

Die Gleichung (B) resp. (B′) reduziert sich zu der Identität $\infty = \infty$.

Dagegen hat man $\varkappa = 0$ für den vollkommen freien Strahl. Die Gleichung (A′) reduziert sich zu der folgenden:

$$\frac{2\pi\lambda^2}{4+\pi} = \alpha^2 - \frac{\pi}{12(4+\pi)}\cdot\alpha^4 \pmod 6.$$

Die exakte Form (A) dieser Gleichung enthält nur gerade Potenzen von $\alpha^2$, was man unmittelbar verifizieren kann, wenn man $\alpha$ mit $-\alpha$ umtauscht. Wir können also den Potenzansatz

$$\alpha^2 = a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4$$

machen. Die obige Gleichung liefert:

$$(42) \qquad \alpha^2 = \frac{2\pi}{4+\pi}\lambda^2 + \frac{\pi^3}{3(4+\pi)^3}\lambda^4 \pmod{\lambda^6}.$$

Die Gleichung (B) resp. (B′) wird die Identität $-\infty = -\infty$.

## § 6. Die Berechnung von $\Psi_E$.

Um $\Psi_E$ numerisch auszuwerten, müssen wir seinen durch (35) angegebenen Wert nach Potenzen von $\varkappa$ und $\alpha$ entwickeln. Wenn man in der Klammer die fünfte Potenz von $\varkappa$ und $\alpha$ vernachlässigt, so hat man:

$$\Psi_E = \frac{\varkappa_1^2}{2\lambda^2}\left[\frac{(1+\varkappa')^2}{(1+\varkappa)^2} + (1+\alpha')^2 \cdot \frac{\left(1-\frac{\alpha^2}{12}\,e^{\xi}\right)}{1+\varkappa}\right],$$

oder der Größe nach geordnet:

$$\Psi_E = \frac{\pi}{4+\pi}\left\{1 + \frac{2\varkappa_2 + 2e^{\xi}\alpha_2 - \varkappa_1\left(2+e^{\xi}\right)}{1+e^{\xi}}\right.$$

$$\left. + \frac{2\left(\varkappa_2\varkappa_3 + \alpha_2\alpha_3 e^{\xi}\right) - 6\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + 3\varkappa_1^2 + e^{\xi}\left(\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{16} + \varkappa_1^2 - 2\alpha_2\varkappa_1 - \varkappa_1\varkappa_2\right)}{1+e^{\xi}}\right\}.$$

Das von der ersten Ordnung kleine Glied in der Klammer verschwindet infolge der ersten von den Gleichungen (39), sodaß die Abweichung $\delta_E = \Psi_E - \Psi$ von dem Kirchhoffschen Widerstandsfaktor $\Psi = \frac{\pi}{4+\pi}$ gleich dem von der zweiten Ordnung kleinen Ausdruck:

$$\delta_E = \frac{\pi}{4+\pi} \cdot \frac{2\left(\varkappa_2\varkappa_3 + \alpha_2\alpha_3 e^{\xi}\right) - 6\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + 3\varkappa_1^2 + e^{\xi}\left(\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{16} + \varkappa_1^2 - 2\alpha_2\varkappa_1 - \varkappa_1\varkappa_2\right)}{1+e^{\xi}}$$

ist. Ersetzt man hierin die Klammer $2\left(\varkappa_2\varkappa_3 + e^{\xi}\alpha_2\alpha_3\right)$ durch ihren aus (40) entnommenen Wert und benutzt man hinterher noch die erste von den Gleichungen (39), so erhält man schließlich:

$$(43) \qquad \delta_E = \frac{\pi\left[4+\pi e^{\xi} - (4+\pi)\,e^{2\xi}\right]}{12\,(4+\pi)\left(1+e^{\xi}\right)}\,\varkappa_1^2 = \frac{\pi^2\left[4+\pi e^{\xi} - (4+\pi)\,e^{2\xi}\right]}{6\,(4+\pi)^3\left(1+e^{\xi}\right)^2} \cdot \lambda^2.$$

Das augenfälligste bei dieser Formel ist wohl das Verschwinden von $\delta_E$ für $\xi = 0$, d. h. wenn die Platte sich in B befindet, dann gibt es keine Abweichung von dem Kirchhoffschen Widerstandskoeffizienten bis auf Größen von der Größenordnung von $\lambda^3$. Sonst verschwindet $\delta_E$ nirgends, sodaß die Lage als die günstigste bei den Eiffelschen Widerstandsversuchen zu betrachten wäre.

Maßgebend bei der Variation von $\delta_E$ ist der Faktor:

$$(44) \qquad \eta = \frac{4+\pi e^{\xi} - (4+\pi)\,e^{2\xi}}{\left(1+e^{\xi}\right)^2}.$$

Man erhält durch Differentiation:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -e^{\xi} \cdot \frac{8 - \pi + (8 + 3\pi)\, e^{\xi}}{\left(1 + e^{\xi}\right)^3}.$$

Diese Ableitung ist fortwährend negativ und verschwindet nirgends im Endlichen. Daraus schließen wir, daß $\delta_E$ negativ für positive Werte für $\xi$ und positiv für negatives $\xi$ ausfällt, d. h. bedeutet $\xi$ eine positive Zahl, dann ist $\eta(\xi) = -\eta_1$ und $\eta(-\xi) = +\eta_2$, wobei $\eta_1$ und $\eta_2$ zwei positive Größen sind; die Differenz $\eta_1 - \eta_2$ ist gleich $\pi \cdot \left(\frac{e^{\xi} - 1}{e^{\xi} + 1}\right)^2$, also immer positiv: Von zwei inbezug auf die Öffnung $B_1 B_2$ symmetrisch gelegenen Positionen der Platte ist die im Kanal befindliche die geeignetere für die Widerstandsversuche.

Der Verlauf der Kurve (44) ist ungefähr durch die Figur 14 gegeben.

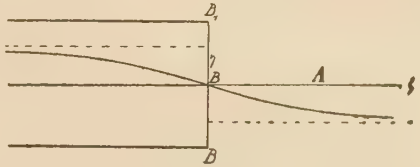


Fig. 14.

## § 7. Die Berechnung der Grössen $\Psi_k$, $\Psi_k'$ und $\Psi_S$.

Für den Kanal hat man aus (36):

$$\Psi_k = \frac{\varkappa_1^2}{2\lambda^2}(1 + \varkappa')^2,$$

wenn die Geschwindigkeit vor dem Körper gemessen wird. Führt man den durch (41) gegebenen Wert von $\varkappa_1^2$ ein und zieht man den Kirchhoffschen Widerstandskoeffizienten $\Psi = \frac{\pi}{4 + \pi}$ ab, so erhält man:

$$\delta_k = \frac{\pi}{4 + \pi}\left\{2\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + 2\varkappa_2 \varkappa_S\right\} = 0{,}825\,\lambda + 1{,}232\,\lambda^2 \ (\text{mod. } \lambda^3).$$

Der positive Fehler beträgt bei $\lambda^2 = \frac{1}{10}$ ungefähr 27 %.

Bezieht man den Widerstand auf die Geschwindigkeit hinter dem Körper, so hat man aus (36'):

$$\Psi'_k = \frac{\varkappa_1^2}{2\lambda^2} \cdot \frac{(1+\varkappa')^2}{(1+\varkappa)^2} = \frac{\pi}{4+\pi} \{1 + 2\varkappa_1 (\varkappa_3 - \varkappa_1)\}$$

Für den entsprechenden Fehler $\delta'_k$ hat man:

$$\delta'_k = \frac{2\pi}{4+\pi} (\varkappa_3 - \varkappa_1) \varkappa_1 = +0{,}018\,\lambda^2 \text{ (mod. } \lambda^3).$$

Der Fehler ist ebenfalls positiv aber bedeutend kleiner als $\delta_k$; er ist vollkommen vernachlässigbar bei der heutigen Genauigkeit der hydrodynamischen Messungen. Der Widerstandsfaktor der Platte in dem vollkommen freien Strahle wird durch die Formel (37) gegeben:

$$\Psi_S = \frac{\alpha^2}{2\lambda^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right).$$

Wenn man hierin $\alpha^2$ durch seinen durch (42) gegebenen Wert ersetzt und daraus den Kirchhoffschen Druck abzieht, so hat man für den Fehler $\delta_S$:

$$\delta_S = -\frac{4\pi^2}{6(4+\pi)^3}\lambda^2 = -0{,}018\,\lambda^2 \text{ (mod. } \lambda^4).$$

Der Fehler ist in diesem Falle negativ und bei gleichem $\lambda$ gleich dem Fehler $\delta'_k$ im absoluten Betrage.

Man kann also sagen, daß die Abweichung $\delta$ des Zahlenfaktoren $\Psi$ von dem Kirchhoffschen wenigstens für sehr kleines $\lambda$ eine monoton abnehmende Funktion von $\xi$ ist. Sie ist positiv und gleich $0{,}018\,\lambda^2$, wenn die Versuchsplatte sehr weit im Kanal steht: kommt die Platte immer näher an die Öffnung $B_1 B_2$ heran, so nimmt $\delta$ beständig ab und verschwindet schließlich, wenn die Platte dicht vor der Öffnung steht. Rückt die Platte weiter nach rechts, so wird $\delta$ negativ und nimmt stets ab, bis es sehr weit von $B$ den Wert $-0{,}018\,\lambda^2$ erreicht. Der qualitative Verlauf von $\delta$ als Funktion von $\xi$ ist durch die in Figur 14 gezeichnete Kurve gegeben.

## § 8. Die Fehlerkurven $\delta'_k$ und $\delta_S$.

Ich will jetzt den allgemeinen Verlauf der Größen $\delta'_k$ und $\delta_S$ als Funktionen von $\lambda^2$ studieren. Für den Kanal reduziert sich die Gleichung (A) zu der folgenden:

$$\text{(A'')} \qquad \frac{\pi}{2}\lambda^2 x = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}.$$

Dabei ist

$$x = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \frac{1}{V_D}.$$

Der Widerstandsfaktor $\Psi'_k$ wird durch die Gleichung (36′) oder

(36″) $$\Psi'_k = \frac{(x-1)^2}{2\lambda^2 x^2}$$

gegeben und also

(45) $$\delta'_k = \frac{(x-1)^2}{2\lambda^2 x^2} - \frac{\pi}{4+\pi}.$$

Wir müssen den Wert von $x$ als Funktion von $\lambda$ aus (A″) herausziehen und denselben in (45) einsetzen. Dieser Wert wird durch den Schnittpunkt der Kurve

(46) $$y = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}$$

mit der Geraden

(47) $$y = \frac{\pi}{2} \lambda^2 x$$

bestimmt.

Die Kurve (46) geht durch den Punkt $x = 1$, $y = 0$, wo sie die $x$-Achse tangiert und besitzt die Asymptote

$$y = \frac{\pi}{2} x - 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Der allgemeine Verlauf dieser Kurve wird durch die Figur 15

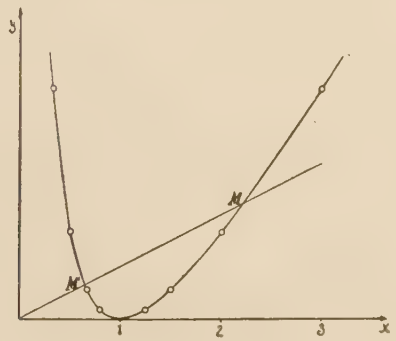


Fig. 15.

veranschaulicht. Die Gerade (47) schneidet sie in zwei Punkten $M$ und $M'$, wenn $\lambda^2 < 1$ ist. Ist $\lambda^2 > 1$, so gibt es nur einen

Schnittpunkt mit einer Abszisse kleiner als 1. Die Abszisse soll aber gleich $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$, d. h. größer als 1 sein, sodaß nur der Schnittpunkt $M$ für uns in Betracht kommt. Daraus sieht man, daß es immer eine Lösung gibt, wenn $\lambda^2 < 1$ ist; für $\lambda^2 > 1$ gibt es aber keine Lösung.

Die Variation von $\delta_k'$ als Funktion von $\lambda^2$ kann man auch dadurch bekommen, daß man in (A.") verschiedene Werte für $x$ einsetzt und die dazu entsprechenden Werte von $\lambda$ berechnet. Man bekommt auf diese Weise folgende Tabelle:

| $x$ | $V_D = \frac{1}{x}$ | $\lambda_2 = \frac{d}{D}$ | $\Psi_k'$ | $\delta_k'$ | $\Psi_k$ | $\delta_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $^5/_4$ | 0,8 | 0,045 | 0,4409 | 0,001 | 0,689 | 0,249 |
| $^3/_2$ | 0,67 | 0,125 | 0,443 | 0,003 | 0,997 | 0,557 |
| 2 | 0,5 | 0,279 | 0,4486 | 0,009 | 1,795 | 1,355 |
| 3 | 0,33 | 0,485 | 0,458 | 0,018 | 4,127 | 3,687 |
| 10 | 0,1 | 0,837 | 0,484 | 0,044 | 48,38 | 47,94 |
| $\infty$ | 0 | 1 | 0,5 | 0,06 | $\infty$ | $\infty$ |

Daraus erhält man die durch die Figur 16 angegebene Kurve als die die Variation von $\delta_k'$ als Funktion von $\frac{d}{D}$ darstellende. In der nebenstehenden Tabelle haben wir auch die entsprechenden Werte

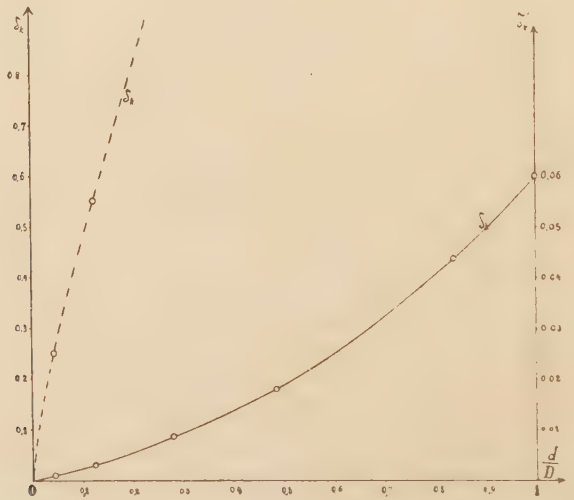

Fig. 16.

von $\Psi_k$ und $\delta_k$ eingetragen, d. h. diejenigen Widerstandsfaktoren und Abweichungen von der Kirchhoffschen Strömung, die man bekommt, wenn man den Widerstand auf die Geschwindigkeit vor der Platte bezieht. Daraus sieht man, daß der Fehler in diesem Falle bereits bei $\frac{d}{D} = \frac{1}{22}$ etwa 54 % des ganzen Widerstandes beträgt. Die punktierte Linie in der Figur 16 gibt den Verlauf dieses Fehlers als Funktion von $\frac{d}{D}$.

Bei dem vollkommen freien Strahl wird die Gleichung (A) durch die folgende ersetzt:

$$(A''') \qquad \frac{\pi}{2}\lambda^2 = \frac{\pi}{2} + \sin\alpha \log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right] - \frac{\pi}{2}\cos\alpha.$$

Der Widerstandsfaktor $\Psi_S$ wird durch die Gleichung (37) gegeben und also der entsprechendo Fehler beträgt den Wert:

$$\delta_S = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\lambda^2} - \frac{\pi}{4+\pi}.$$

Setzt man in (A‴) verschiedene Werte für $\alpha$ ein und berechnet den dazu entsprechenden Wert von $\lambda^2$, so erhält man folgende Tabelle:

| $\alpha$ | $\lambda^2 = \frac{d}{D}$ | $\Psi_S$ | $\delta_S$ |
|---|---|---|---|
| $10^0$ | 0,035 | 0,4393 | − 0,0005 |
| $20^0$ | 0,138 | 0,4378 | − 0,0021 |
| $30^0$ | 0,309 | 0,4340 | − 0,006 |
| $40^0$ | 0,546 | 0,4286 | − 0,0113 |
| $50^0$ | 0,85 | 0,4204 | − 0,0195 |
| $90^0$ | $\infty$ | 0 | − 0,44 |

Der Fehler ist überall negativ und sehr klein im absoluten Betrage. Die Divergenz der beiden Zweige des Strahles hinter der Platte ist aber beträchtlich; sie beträgt den Wert von $20^0$ bereits bei dem Werte 0,035 von $\frac{d}{D}$. Figur 17 (S. 60) stellt die Variation von $\delta_S$ (vollgezogene Linie) und von $\alpha$ (punktierte Linie) als Funktion von $\frac{d}{D}$ dar.

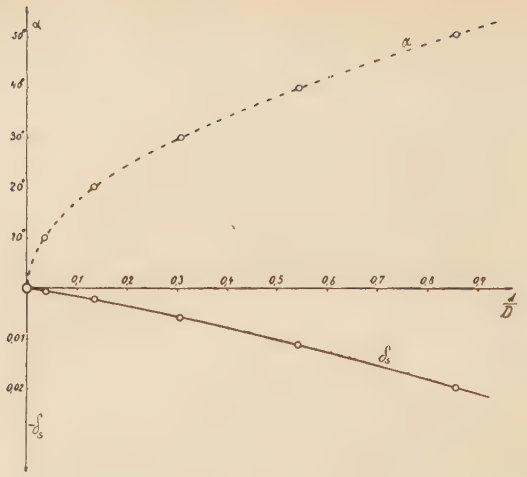


Fig. 17.

## § 9. **Zusammenfassung der Resultate und Schlussbemerkungen.**

Der Fehler $\delta$, den man bei der experimentellen Ermittlung des Widerstandes begeht, ist sowohl bei den Eiffelschen als auch bei den Göttinger Versuchen sehr klein; er ist kleiner als $0.02\,\frac{d}{D}$ in erster Annäherung, d. h. praktisch vernachlässigbar, und zwar positiv im Falle des Kanals und negativ bei der Eiffelschen Einrichtung. Diese Tatsache steht im Einklang mit dem Experiment: die sich aus den Eiffelschen Messungen ergebenden Zahlen sind nämlich kleiner als die von der Göttinger Versuchsanstalt veröffentlichten, die Unterschiede sind jedoch sehr klein [1]). Es ergibt sich übrigens als günstigste Lage der Platte in einem Kanal mit parallelen Wänden, die unmittelbar vor der Öffnung des Kanals, wo $\delta$ gleich Null wird.

Auffallend groß wird der positive Fehler $\delta$, wenn der Widerstand bei den Versuchen im Tunnel auf die Geschwindigkeit vor der Platte bezogen wird; $\delta$ beträgt in diesem Falle $0{,}8\sqrt{\frac{d}{D}}$ in erster Annäherung. Die Erklärung hiervon ist darin zu suchen, daß die Geschwindigkeit weit vor der Platte bedeutend kleiner

1) Siehe hierzu O. Föppl, Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt von Eiffel verglichen mit den Gött. Resultaten, Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1912.

als die weit hinter der Platte ist. Die sich theoretisch ergebende Geschwindigkeit vor der Platte ist nach der Formel (32) gleich $1 - \varkappa_1$ in erster Annäherung, wenn die Geschwindigkeit weit hinter der Platte gleich 1 ist. Der Unterschied zwischen den beiden Geschwindigkeiten vor und hinter der Platte beträgt also $0{,}94\sqrt{\frac{d}{D}}$, d. h. 0,30 etwa bei $\frac{d}{D} = \frac{1}{10}$. In Wirklichkeit ist dieser Unterschied viel kleiner, da die Geschwindigkeit hinter der Platte infolge der da auftretenden turbulenten Bewegung vermindert wird. Man ermittelt also experimentell Widerstandsfaktoren, welche um ein paar Prozent größer sind, als die in der in allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit auftretenden. Dieser Geschwindigkeitsunterschied vor und hinter der Platte wird bei der Eiffelschen Einrichtung sehr klein, wenn die Platte sehr weit von der Öffnung gestellt wird. Er ist nämlich in erster Annäherung gleich $\sqrt{\frac{2\pi}{(4+\pi)\left(1+e^{\xi}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{d}{D}}$; für $\xi = \infty$ verschwindet er. Diese Lage der Platte ist aber aus praktischen Gründen unbrauchbar, denn der aus der Öffnung $B_1 B_2$ austretende Strahl wird in einiger Entfernung vollkommen turbulent.

Jedenfalls liefern die Messungen im Kanal, wenn der Widerstand auf die Geschwindigkeit vor den Körper bezogen wird, die größten Abweichungen; aus dem Grunde empfiehlt es sich, denselben auf die Geschwindigkeit hinter den Körper zu beziehen.

Betreffs der Strömung eines Strahles aus einem Kanal mit parallelen Wänden ist noch Folgendes zu bemerken. Die beiden Zweige des Strahles hinter der Platte laufen divergent unter dem Winkel $2\alpha$, wobei $\alpha$ in erster Annäherung nach der zweiten von den Gleichungen (38) gleich $\sqrt{\frac{2\pi}{(4+\pi)\left(1+e^{-\xi}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{d}{D}}$ ist. Die Kurve, welche die Variation von $\alpha$ als Funktion von $\frac{d}{D}$ darstellt, hat also einen parabolischen Charakter wenigstens für kleine Werte für $\frac{d}{D}$; für den Fall, daß die Wände des Kanals verschwinden, weicht sie sehr wenig von einer wirklichen Parabel ab (vgl. die punktierte Linie auf der Fig. 17 sowie die Tabelle auf der Seite 59).

Will man die beiden Zweige des Strahles hinter der Platte in einem zweiten Kanal auffangen, so muß der Anfangsquerschnitt

dieses letzten Kanals größer als der des ersten sein und zwar für jede Platte ein anderer. Ist z. B. der Abstand zwischen den beiden parallelen Wänden des ersten Kanals gleich 1,50 m, so muß die Öffnung des zweiten 3 m betragen, wenn $\xi = 3$, $\frac{d}{D} = \frac{1}{10}$ und die Entfernung zwischen den beiden Kanälen 3,60 m ist.

# Lebenslauf.

Ich, Victor Vâlcovici, griechisch-katholischer Konfession, bin am 24. September 1885 in Galatz (Rumänien) als Sohn des Buchhändlers Nikolai Vâlcovici geboren. Nachdem ich im Jahre 1904 das Abiturientenexamen bestanden hatte, besuchte ich die Universität in Bukarest, wo ich im Jahre 1907 das Lizenz-Diplom erwarb. Zwei Jahre später wurde ich durch Examen Oberlehrer am Gymnasium in Buzau. Wintersemester 1909 bis Sommersemester 1913 bezog ich zur weiteren Ausbildung die Universität zu Göttingen. Daselbst besuchte ich die Vorlesungen, Seminare und Praktika der Herren: Born, Haar, Hecke, Hilbert, v. Kármán, Madelung, Müller, Prandtl, Runge, Simon, Toeplitz, Voigt, Weyl, Wiechert.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern spreche ich meinen aufrichtigsten Dank aus. Ganz besonders danke ich Herrn Prof. Prandtl für die mannigfache Anregung und wohlwollende Unterstützung, die er mir bei der Anfertigung dieser Arbeit hat zuteil werden lassen.

zwar